UNIVERSIDAD DE ATACAMA

"ALGEBRA LINEAL"

PROFESOR:

JULIO VERA AGUILERA
Magister en Matemática

FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS
AREA DE MATEMATICAS

DIRECCION DE EXTENSION, COMUNICACIONES Y RELACIONES UNIVERSITARIAS
DEPARTAMENTO DE CAPACITACION
****

INDICE

INTRODUCCION

El Departamento de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería, consciente de la falencia de libros y como una forma de lograr un mejor nivel de aprendizaje, se ha propuesto escribir apuntes de clase que sirvan de base para el desarrollo de las diferentes asignaturas que debe impartir tanto en las carreras de Ingeniería Civil, Ingeniería de Ejecución y Técnico Universitario.

Este es uno de los volúmenes y se preparan otros.

Es con una inmensa satisfacción como vemos cumplirse esta nueva etapa, no la menos importante, en el largo proceso que estamos desarrollando.

Dentro de los campos de la Matemática, Física, Ingeniería, Economía, por nombrar algunas ciencias, los modelos matemáticos lineales han llegado a jugar un papel de mucha importancia. De aquí la necesidad que se tiene de estar al tanto de los fundamentos del Algebra Lineal.

Mi intención no es dar una acabada teoría de esta rama de las matemáticas, sino que más bien una primera información de ella, que entre otras cosas ilustrará al estudiante y lo dejará en condiciones de seguir sin mayores dificultades, cualquier curso de Algebra Lineal o aplicación de ella a un nivel de post-grado.

En relación a los requisitos de este curso, el estudiante debe tener un cierto dominio de algunos conceptos de matemáticas básicas tales como estructuras algebraicas, homomorfismo de estructuras, vectores geométricos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

En el primer punto de este volumen, antes de definir espacio vectorial, se presentan algunos conceptos preliminares sin mayores demostraciones, como una forma de tener presente algunos de los pre-requisitos. Algunos de estos conceptos desarrollan posteriormente en este apunte.

1.- ESPACIO VECTORIAL

1.1. DEF. OPERACION BINARIA INTERNA (o. b. i)

Sea A un conjunto no vacío. Se llama operación binaria interna sobre X a toda aplicación * tal que

$* : A \times A \longrightarrow A$

Ejemplo 1. Sea $A = \{1,2\}$ y

$* : A \times A \longrightarrow A$

Definida por

$1 * 1 = 1$
$1 * 2 = 2$
$2 * 1 = 1$
$2 * 2 = 2$

Entonces * es una o. b. i. sobre $\{1,2\}$

OBS. SI * es una o. b. i. sobre X, también se dice que * es una ley de composición interna (l.c.i.)

1.2. DEF. OPERACION BINARIA EXTERNA (o. b. e.)

Sean A y K conjuntos no vacios. Se llama operación binaria externa sobre A con operadores en K a toda aplicación □ tal que

$\square : K \times A \longrightarrow A$

Ejemplo 2.- SEan $A = \{2,4\}$, $K = \{1\}$ y

$\square : K \times A \longrightarrow A$ definida por

$1 \square 2 = 2$
$1 \square 4 = 4$

Entonces $\square$ es una o.b.e. sobre $\{2,4\}$

Obs.- Si $\square$ es una o.b.e. sobre A, también se dice que $\square$ es una ley de composición externa.(l.c.e.)

1.3.- DEF. CERRADO

Sea * una o.b.i. sobre A entonces se dice que A es cerrado respecto de * si

$$X, Y \in A \Longrightarrow X * Y = Z \in A$$

1.4.- DEF. CONMUTATIVIDAD-ASOCIATIVIDAD

Sea * una o.b.i. sobre A entonces

1) * se dice que es conmutativa ssi

$$\forall\ X, Y \in A \Longrightarrow X * Y = Y * X$$

2) * se dice que es asociativa ssi

$$\forall\ X, Y, Z, \in A \Longrightarrow X * (Y * Z) = (X * Y) * Z$$

1.5.- DEF. DISTRIBUTIVIDAD

SEan * y $\square$ o.b.i. sobre A entones se dice que * es:

1) Distributiva por la izquierda respecto de $\square$ ssi

$$\forall\ X, Z, \in A \Longrightarrow X * (Y \square Z) = (X * Y) \square (X * Z)$$

2) Distributiva por la derecha respecto de $\square$ ssi:

$$\forall\ X, Y, Z, \in A \Longrightarrow (Y \square Z) * X = (Y * X) \square (Z * X)$$

3) Distributiva respecto de $\square$ ssi es distributiva por la izquierda y derecha

Ejemplo 3.-

SEan $A = \{o, 1\}$ y las operaciones binarias * y Δ definidas por las siguiuentes tablas:

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Δ	0	1
0	0	1
1	1	0

Entonces de las tablas se ve claramente que:

1) A es cerrado respecto de $*$ y Δ
   Por ejemplo $1 * 0 = 1$

2) $*$ y Δ son asociativa y conmutativas
   Por ejemplo

$$1 * 0 = 0 * 1 = 0$$

$$0 \Delta 1 = 1 \Delta 0 = 1$$

$$1 * (0*1) = (1*0) * 1$$

3) $*$ es distributiva con respecto a Δ
   Por ejemplo

$$1 * (0 \Delta 1) = (1 * 0) \Delta (1 * 1)$$

1.6. DEF. ELEMENTO NEUTRO (e.n.)

Sea $*$ una o.b.i sobre A. Entonces diremos que $e \in A$ es un elemento;

1) Neutro izquierdo en A con respecto a $*$ ssi
   $\forall X \in A \Longrightarrow e * X = X$
2) Neutro derecho en A con respecto a $*$ ssi
   $\forall X \in A \Longrightarrow X * e = X$
3) Elemento neutro en A respecto de $*$ ssi es neutro izquierdo y neutro derecho; es decir ssi
   $\forall X \in A \Longrightarrow X * e = e * X = X$

Ejemplo 4.- Para la operación $*$ del ejemplo 3 se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 1*0 = 0*1 = 0 \\ 1*1 = 1*1 = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow e = 1$$

1.17.- DEF. ELEMENTO INVERSO (e.i.)

Sea $*$ una o.b.i. sobre A. Entonces diremos que $X^{-1} \in A$ es un elemento:

1) Inverso izquierdo de $X \in A$ respecto de $*$ ssi

$X^{-1} * X = e$

2) Inverso derecho de $X \in A$ respecto de $*$ ssi

$X * X^{-1} = e$

3) Inverso de $X \in A$ respecto de $*$ ssi es un inverso derecho e inverso izquierdo, es decir ssi:

$X * X^{-1} = X^{-1} * X = e$

Ejemplo 5.- Sea $A = \mathbb{R}$ y definamos la operación $*$ en A por

$X * Y = X \cdot Y$ con $X, Y \in A$

donde $\cdot$ es la multiplicación usual en $\mathbb{R}$

Entonces tenemos:

1) A es cerrado respecto de $*$

$X, Y \in A \Longrightarrow X * Y = X \cdot Y \in A$

2) $*$ es conmutativa

$$\begin{aligned} X, Y \in A \Longrightarrow \quad X * Y &= X \cdot Y \\ &= Y \cdot X \\ &= Y * X \end{aligned}$$

Recordemos que la multiplicación $\cdot$ en $\mathbb{R}$ es conmutativa, asociativa y distributiva respecto de la $+$:

3) $*$ es asociativa

$$\begin{aligned} X, Y, Z \in A \Longrightarrow \quad (X * Y) * Z &= (X \cdot Y) * Z \\ &= (X \cdot Y) \cdot Z \\ &= X \cdot (Y \cdot Z) \\ &= X * (Y \cdot Z) \\ &= X * (Y * Z) \end{aligned}$$

4) Elemento neutro, e

$X * e = e * X = X \qquad \forall X \in A$

$X * e = X \cdot e = X \Longrightarrow e = 1$

5) Elemento inverso X^{-1}

$X * X^{-1} = X^{-1} * X = 1$ para cada $X \in A$

$X * X^{-1} = X \cdot X^{-1} \Longrightarrow X^{-1} = \frac{1}{X}$

1.8.- DEF. GRUPO.

Sea un conjunto $G \neq \emptyset$ y definamos la operación $*$ en G. Entonces $(G,*)$ es un grupo si

1.- G es cerrado respecto de $*$

2.- $*$ es asociativa

3.- Existe elemento neutro para todo $X \in G$

4.- Para cada $X \in G$ existe elemento inverso

Ejemplo 7.- Sea $G = \mathbb{R}$ y definamos la operación $*$ en G por $\ni$

$$X * Y = X \cdot Y$$

Entonces por el ejemplo 6 se tiene que $(G,*)$ es un grupo

1.9 .- DEF. GRUPO ABELIANO

Si $(G,*)$ es un grupo y además se tiene que $*$ es conmutativa, entonces se dice que $(G,*)$ es un grupo conmutativo o grupo abeliano.

Ejemplo 8. El grupo $(G,*)$ del ejemplo 7 es un grupo abeliano

Ejemplo 9. Son grupo abeliano los siguientes:
$(Z,+)$, $(Q,+)$, $(R,+)$, $(Q^*,\cdot)$, $(R^*,\cdot)$

1.10.- PROP. Sea $(G,*)$ un grupo. Entonces.

1) $\forall X \in G, \exists! e \in G$ tal que
$X * e = e * X = X$

2) Para cada $X \in G$, $\exists! X^{-1} \in G$ tal que
$X * X^{-1} = X^{-1} * X = e$

3) $\forall X \in G$ se tiene:

$$(X^{-1})^{-1} = X$$

4) $X, Y, \in G \Longrightarrow (X * Y)^{-1} = Y^{-1} * X^{-1}$

Dem.: se deja de ejercicio

1.11. DEF. HOMOMORFISMO

Sean $(G_1, *)$ y (G_2, Δ) grupos. Entonces la aplicación φ

$$\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$$

Es un homorfismo de grupo si:

$$\forall\ X, Y \in G_1 \Longrightarrow \varphi(X * Y) = \varphi(X) \Delta \varphi(Y)$$

Ejemplo 10. SEan los grupos $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ y $(\{1,-1\}, \cdot)$ y definamos φ por

$$\varphi : \mathbb{R}^* \longrightarrow \{1,-1\}$$

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X > 0 \\ -1 & \text{si } X < 0 \end{cases}$$

Entonces se tiene que φ es un homomorfismo

$$\varphi(X \cdot y) = \varphi(X) \cdot \varphi(Y) \quad ; \quad X, Y \in \mathbb{R}^*$$
$$\varphi(X), \varphi(Y) \in \{1,-1\}$$

1.12.- PROP. SEan $(G_1, *)$ y (G_2, Δ) grupos con elementos neutros e y e' respectivamente

y $F : G_1 \longrightarrow G_2$ homomorfismo

Entonces;

1) $F(e) = e'$

2) $\forall\ X \in G,\ ; \left[F(X)\right]^{-1} = F(X^{-1})$

Dem. se deja de ejercicio.

1.13. DEF. ISOMORFISMO

Sean $(G_1, *)$ y (G_2, Δ) grupo, entonces

$$F : G_1 \longrightarrow G_2$$

es un isomorfismo si F es biyectiva y es un homomorfismo

En este caso se dice que G_1 y G_2 son isomorfos y se denota por $G_1 \cong G_2$

1.14.- PROP. Si se define la relación $\mathcal{R}$ por

$$G_1 \mathcal{R}\ G_2 \Longleftrightarrow G_1 \cong G_2$$

Se tiene que la relación $\cong$ es una relación de equivalencia.

Ejemplo 11.- Sean los grupos $(\mathbb{R},+)$ x $(\mathbb{R}+,\cdot)$

y definamos F por

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}+$$
$$X \longmapsto e^X$$

Entonces $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}+$

En efecto

1) F es sobre:

$$\forall\ Y \in \mathbb{R}+ \longrightarrow \exists X \in \mathbb{R} \text{ tal que } Y = e^X$$

2) F es inyectiva

$$\forall X, Y \in \mathbb{R} : \quad F(X) = F(Y) \Longleftrightarrow e^X = e^Y \Longrightarrow X = Y$$

3) F es un homomorfismo

$$\forall X, Y \in \mathbb{R} : F(X+Y) = e^{X+Y} = e^X \cdot e^Y = F(X) \cdot F(Y)$$

1.15. DEF. CUERPO

Sea un conjunto $C \neq \emptyset$ provisto de las operaciones $(*)$ Y (Δ).
Entones $(C,*,\Delta)$ es un cuerpo si

1) $(C,*)$ es un grupo abeliano
2) (C',Δ) es un grupo
   con $C' = C - \{o\}$
3) La operación Δ es distributiva respecto de $*$

OBS..-

1) El grupo $(C,*)$ se denomina comunmente grupo aditivo y su neutro se llama cero, 0.

2) El grupo (C',Δ) se denomina usualmente grupo multiplicativo y su neutro se denomina unidad, 1.

1.16.- DEF. CUERPO CONMUTATIVO

Si en el cuerpo $(C,*,\Delta)$ la operación Δ es conmutativa, entonces se dice que el cuerpo es conmutativo.

Ejemplo 12.- $(\mathbb{Q},+,\bullet)$; $(\mathbb{R},+,\bullet)$, $(\mathbb{C},+,\bullet)$ son cuerpos

Para el caso $(\mathbb{C},+,\bullet)$ se tiene:

1) $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\left[(X_1,X_2) + (Y_1,\ Y_2)\right] \longmapsto (X_1+Y_1\ ,\ X_2+Y_2)$$

2) $\bullet : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\left[(X_1,X_2)\ ,\ (Y_1,Y_2)\right] \longmapsto (X_1Y_1 - X_2Y_2,\ X_1Y_2 + X_2Y_1)$$

3) $(\mathbb{C},+)$ es un grupo abeliano

Neutro $0 = (o,o)$

Inverso $\left[(X_1;\ X_2)\right]^{-1} = (-X_1, -X_2)$

4) $(\mathbb{C}',\bullet)$ es un grupo conmutativo

Neutro o unidad $1 = (1,0)$

Inverso $\left[(X_1,X_2)\right]^{-1} = \left(\dfrac{X_1}{X_1^2+X_2^2}\ ,\ \dfrac{-X_2}{X_1^2+X_2^2}\right)$

5) Δ es distributiva respecto de *

Veamos ahora algunos concepto sobre matrices y sistemas de ecuaciones lineales en forma preliminar ya que éstos se desarrollan posteriormente en este apunte.

1.17. DEF. SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

SEa K un cuerpo, entonces:

1)
$$\begin{array}{l} A_{11}\,X_1 + A_{12}\,X_2 + \cdots\cdots + A_{1n}\,X_n = Y_1 \\ A_{21}\,X_1 + A_{22}\,X_2 + \cdots\cdots + A_{2n}\,X_n = Y_2 \\ \vdots \\ A_{m1}\,X_1 + A_{m2}\,X_2 + \cdots\cdots + A_{mn}\,X_n = Y_m \end{array} \qquad (1.1.)$$

donde: $Y_i \in K \qquad i = 1,\ldots\ldots,m$

$A_{ij} \in K \qquad i = 1,\ldots\ldots,m$

$\qquad\qquad j = 1,\ldots\ldots,n$

Se llama sistema de ecuaciones lineales sobre K con n variables

2) Toda n-upla $(X_1,\ldots,X_n)$ de elementos de K, se llama solución del sistema, si satisface cada una de las ecuaciones.

3) Si $Y_i = 0 \quad \forall\, i = 1,\ldots,n$, entonces el sistema se llama homogeneo.

4) Notación matricial para el sistema (1.1) es

$AX = Y$

Donde

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}$$

A Se llama matriz de los coeficientes del sistema

OBS: Estrictamente hablando la disposición rectangular expuesta no es una matriz, sino una representación de ella.

1.18.- DEF. MATRIZ

Una matriz de m filas y n columnas ,mxn, sobre el cuerpo K es una aplicación A tal que :

$$\text{Si } B : \{(i,j) \;/\; 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n,\; i,j \in \mathbb{Z}\}$$

$$A : B \longrightarrow K$$

$$(i,j) \longmapsto A(i,j) = A_{ij}$$

Los escalares $A_{ij} \in K$ se llaman elementos de la matriz

La matriz la denotaremos por A = Aij y denotamos:

$$M_{mxn} = \{A \;/\; A_{ij} \text{ de } mxn\}$$

1.19.- DEF. ALGEBRA DE MATRICES

1) Si $A,B \in M_{mxn}$ se define la suma de A y B

$$C = A + B \quad \text{con } C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

2) Si $A \in M_{mxn}$ y $\lambda \in K$ se define la multiplicación de A por un escalar.

$$C = \lambda A \quad \text{con } C_{ij} = A_{ij}$$

3) Si $A \in M_{mxn}$ y $B \in M_{nxp}$ se define el producto de A y B

$$C = A \cdot B \quad \text{con } C_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir} B_{rj}$$

Ejemplo 13.; Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 15 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A+B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 18 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda = 3$ $\qquad 3\ B = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 3 \\ 9 & 24 & -6 \end{pmatrix}$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

1.20.- DEF. OPERACIONES ELEMENTALES FILAS

Una operación elemental fila es una función E tal que:

$$E : M_{mxn} \longrightarrow M_{mxn}$$
$$A \longmapsto E(A)$$

y define en los siguientes tres casos:

1) $E(A)_{ij} = A_{ij}$ si $i \neq r$ $\qquad E(A)_{rj} = \lambda A_{rj}$

MUltiplicación de una fila de A por $\lambda \neq 0$, $\lambda \in K$

2) $E(A)_{ij} = A_{ij}$ si $i \neq r$ $\qquad E(A)_{rj} = A_{rj} + \lambda A_{sj}$

Reemplazo de la n-ésima fila de A por la fila r más λ veces la fila s con $\lambda \neq 0$ y $r \neq s$

3) $E(A)_{ij} = A_{ij}$ si $i \neq r \wedge i \neq s$

$E(A)_{rj} = A_{sj}$, $E(A)_{sj} = A_{rj}$

Intercambio de 2 filas.

1.21. PROP. A cada operación elemental fila E corresponde una operación elemental fila E_1, del mismo tipo, tal que:

$$E_1 (E(A)) = E (E_1(A)) = A \qquad \forall A$$

Dem. se deja de ejercicio.

1.22.- DEF. MATRICES EQUIVALENTES POR FILAS

SEan $A, B \in M_{mxn}$ sobre el cuerpo K. Entonces B es equivalente por fila a A, si B se obtiene de A por una sucesión finita de operaciones elementales filas.

Y la denotaremos por $A \sim B$

1.23.- PROP. Si se define una relación $\mathcal{R}$ en M_{mxn} por

$$A \,\mathcal{R}\, B \Longleftrightarrow A \sim B$$

Entonces $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencias.

Dem. se deja de ejercicio.

1.24. DEF. MATRIZ REDUCIDA POR FILA

La matriz A de mxn se llama reducida por fila si:

1) El primer elemento no nulo de cada fila no nula de A es 1
2) Cada columna de A que tiene el primer elemento no nulo de alguna fila, tiene todos sus restantes elementos 0.

Ejemplo 14.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B,C no son reducidas por filas.

1.25. PROP. Toda matriz de mxn es equivalente por filas a una matriz reducida por filas.

DEm. se deja de ejercicio

1.26. DEF. MATRIZ ESCALONADA

Una matriz A de mxn se dice matriz escalón si:

1) Si las filas 1,....,r son filas no nulas de A y si el primer elemento no nulo de la fila i está en la columna K_i, $i = 1,....r$
entonces $K_1 < K_2 < \ldots < K_r$
2) Toda fila nula de A está debajo de todas las filas que tienen elementos no nulos.

Ejemplo 15. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{escalonada}$$

1.27.- DEF. MATRIZ ESCALON REDUCIDA POR FILA.

Una matriz A de mxn se llama matriz escalón reducida por fila si:

1) A es reducida a fila
2) A es escalón

Ejemplo 16.- Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ escalón reducida por fila.

1.28.- DEF. RANGO DE UNA MATRIZ

Se define el rango de una matriz A de mxn por el número de filas no nulas, al estar en forma escalonada. Y lo denotaremos por $\rho(A)$.

Ejemplo 17. En el ejemplo 16 se tiene:

$$\rho(A) = 2$$

1.29.- PROP. sea el sistema

$$AX = Y \quad \text{con } A \text{ de } m\times n$$

Entonces se defina la matriz aumentada B por

$$B_{ij} = A_{ij} \quad \text{si} \quad j \leq n$$

$$A_{i(n+1)} = Y_i$$

Se tiene que

1) El sistema AX = Y tiene solución si: $\rho(A) = \rho(B)$

2) Si el $\rho(A) = r$ entonces existen (n-r) variables libres y el sistema tiene infinitas soluciones.

Dem. Se deja de ejercicio.

Ejemplo 18.- El sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Tiene solución

En efecto

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1/5 & \vdots & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/5 & \vdots & 7/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & \vdots & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\rho(A) = \rho(B) = 2$

y $n-r = 3-2 = 1 \Longrightarrow 1$ variable libre

Luego:

$$\begin{aligned} X_1 + 3/5\, X_3 &= 7/5 \\ X_2 - 1/5\, X_3 &= 1/5 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} X_1 &= 7/5 - 3/5\, X_3 \\ X_2 &= 1/5 + 1/5\, X_3 \end{aligned}$$

SEa $X_3 = \lambda$ se tiene que la solución del sistema es:

$$\begin{aligned} X_1 &= 7/5 - 3/5\,\lambda \\ X_2 &= 1/5 + 1/5\,\lambda \end{aligned} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $\lambda = 1$ se tiene una solución particular

$$\begin{aligned} X_1 &= 7/5 - 3/5 \cdot 1 \\ X_2 &= 1/5 + 1/5 \cdot 1 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} X_1 &= 4/5 \\ X_2 &= 2/5 \\ X_3 &= 1 \end{aligned}$$

<u>1.30.- PROP.</u> sea el sistema homogeneo

$AX = 0$ con A de mxn

Entonces:

1) El sistema siempre tiene solución: la trivial.
2) Si $m < n$ entonces el sistema tiene una solución no trivial
3) Si $\rho(A) = r$ entonces existen $(n-r)$ variables libres
4) Si A es nxn entonces el sistema tiene solamente la solución trivial ssi

$$\rho(A) = n$$

(es decir $A \sim I_{nxn}$; I_{nxn} la matriz identidad de nxn)

Dem. se deja de ejercicio.

<u>Ejemplo 19</u>. El sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene solución no trivial

En efecto:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15/2 & -55/2 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -11/3 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -11/3 \\ 1 & 0 & 0 & 17/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 17/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -11/3 \end{pmatrix}$$

Luego $\rho(A) = 3$ y $(n-r) = (4-3) = 1 \Longrightarrow 1$ variable libre

Entonces:

$$\begin{aligned} X_1 + 17/3\ X_4 &= o \\ X_2 - 5/3\ X_4 &= 0 \\ X_3 - 11/3\ X_4 &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} X_1 &= -17/3\ X_4 \\ X_2 &= 5/3\ X_4 \\ X_3 &= 11/3\ X_4 \end{aligned}$$

Si $X_4 = \lambda$; se tiene la solución general del sistema:

$$X_1 = \frac{-17}{3}\lambda \quad ; \quad X_2 = \frac{5}{3}\lambda \quad ; \quad X_3 = \frac{11}{3}\lambda \quad ; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Si hacemos $\lambda = 3$ se tiene una solución particular no trivial.

$$X_1 = -17 \ ; \ X_2 = 5 \ ; \ X_3 = 11 \ ; \ X_4 = 3$$

1.31 DEF. MATRIZ INVERSA

Sea la matriz A de nxn sobre K. entonces:

1) Una matriz B de nxn se llama inversa izquierda de A si:

   $B.A = I$

   donde I es la matriz identidad de nxn

2) B de nxnx se llama inversa derecha de A, si:

$AB = I$

3) Si existe B de nxn tal que:

$AB = BA = I$

Se dice que A es invertible y B su inversa.

1.32.-PROP. Si A es de nxn entonces son equivalentes:

1) A es invertible

2) $A \sim I$

DEm. se deja de ejercicio

1.33.- PROP. Sea A de nxn. Entones si $A \sim I$, entonces la misma sucesión de operaciones aplicadas a I dan A^{-1}.

Dem. Se deja de ejercicio.

La prop. 1.33 nos entrega una forma fácil para encontrar A^{-1}

Ejemplo 20.

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ posee uno inverso

En efecto:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/7 & 2/7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & 2/7 \end{array}\right)$$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

OBS.

$$(A \,\vdots\, I) \sim (I \,\vdots\, A^{-1})$$

1.34. DEF. MATRIZ NO SINGULAR

Una matriz de A de nxn se dice no singular si poses inverso.

1.35.- DEF. SUB MATRIZ

Una submatriz de una matriz A de mxn es una matriz que se obtiene A eliminando ciertas filas y/o columnas. Y se tienen los siguientes casos especiales:

1) $Ren_i \ (A) = (a_{i1}, a_{i2} \ldots\ldots\ldots a_{in})$ i-ésima fila de A

2) $Col_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ J-ésima columna de A

3) La submatriz que se obtiene de A, eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna, se llama Menor del elemento A_{ij} y se denota por:

$$Men_{ij}(A)$$

Ejemplo 21. Sea A de 3 x 4

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$Ren_2(A) = (\ 9 \quad 2 \quad 3 \quad 4\ )$$

$$Col_3(a) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Men_{22}(A) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora algo sobre determinantes de una matriz. No entregaremos por ahora una definición formal de éstos, sino más bien una definición inductiva.

1.36.- DEF. DETERMINANTE.

El determinante de una matriz de nxn sobre el cuerpo K, es una función tal que:

$$Det : M_{nxn} \longrightarrow K$$

$$A \longmapsto Det\ A$$

1) Si A es de 1 x 1, $A = a_{11}$, entonces

$$Det\ A = a_{11}$$

2) Si A es de nxn, con $n \geq Z$

$$\text{Det } A = \sum_{K=1}^{n} a_{1k} \, cof_{1k}(A)$$

donde:

$Cof_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \text{ Det } (Men_{ij}(A))$

es el cofactor de aij

Ejemplo 22.

1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\text{Det } A = a_{11}(-1)^{1+1} \text{ Det } (a_{22}) + a_{12}(-1)^{1+2} \text{ Det } (a_{21})$

$\text{Det } A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Det } A = 4-6 = -2$

3)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Det } A = 1 \text{Det} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2\text{Det} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3\text{Det} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Det A = 0

1.37. PROP. Sean I la matriz identidad de nxn y A,B matriz de nxn. Entonces

1) Det I = 1
2) Si $B \sim A$; tal que B se obtiene de A por el intercambio de la fila i y la j. Entonces :
   Det A = –Det B
3) Si $B \sim A$; tal que B se obtiene de A al multiplicar la fila i–ésima por $\lambda \neq 0$. Entonces:
   Det B = λDet A
4) Si $B \sim A$; tal que B se obtiene de A al cambiar la i–ésima fila por λ veces la fila j más la fila i. Entonces:
   Det A = Det B

5) Si A tiene dos filas o columnas iguales o si A tiene una fila o columna nula. Entonces:

$\text{Det } A = 0$

6) $\text{Det }(A \cdot B) - \text{Det } A \cdot \text{Det } B$

Ejemplo 23:

$$\text{Det } A = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 4\ \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 4\ \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -16\ \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -16\left(1\ \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= -16\left(1\ \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= -16\ (0-8)$$

$$\text{Det } A = 128$$

1.38.- DEF. MATRIZ ADJUNTA

Se define la matriz adjunta de A por.

$$\text{Adj}(A) = C_{ij}$$

donde $C_{ij} = Cof_{ij}(A)$

$= (-1)^{j+i} \text{ Det } (Men_{ji}(A))$

1.39. PROP. Si A es de nxn. Entonces,

$$\text{Det } A \neq 0 \text{ ssi } \exists A^{-1} \text{ y } a^{-1} = \frac{1}{\text{Det } A} \text{ Adj } (A)$$

Dem. se deja de ejercicio.

Ejemplo 24.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Det } A = 2$$

$$\Longrightarrow \exists A^{-1} \text{ y se tiene}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora que hemos entregado algunos conceptos preliminares, los cuales serán muy útiles en el desarrollo de este apunte; pasaremos a definir el concepto de espacio vectorial.

En varias partes de la matemática se presentan conjuntos donde tienen sentido y resulta interesante considerar las "combinaciones lineales" de los elementos de dichos conjuntos. Por ejemplo, en los sistemas de ecuaciones lineales, en el estudio de ecuaciones diferenciales, etc.

Hablando en forma simple, el álgebra lineal, es aquella rama de la matemática que trata de las propiedades comunes de los sistemas algebraicos, que constan de un conjunto, más una noción razonable de "combinación lineal" de los elementos del conjunto. En este punto, se definirán los objetos matemáticos que la experiencia ha demostrado ser las más útiles abstracciones de este tipo de sistemas algebraicos.

1.40.- DEF. ESPACIO VECTORIAL (e.v.)

Sean un conjunto $V \neq \emptyset$, K un cuerpo y las operaciones + y $\cdot$ definidas por:

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (X, Y) &\longmapsto X + Y \end{aligned} \qquad \text{o.b.i}$$

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, X) &\longmapsto \lambda \cdot X \end{aligned} \qquad \text{o.b.e}$$

Entonces se dice que V es un espacio vectorial sobre K con las operaciones + y $\cdot$ si:

1) $(V, +)$ es grupo abeliano
2) $\alpha X \in V$ con $\forall \alpha \in K, X \in V$
3) $\alpha(X \pm Y) = \alpha X + \alpha Y$ con $\alpha \in K$; $X, Y \in V$
4) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$ con $\alpha, \beta \in K$; $X \in V$
5) $(\alpha\beta) X = \alpha(\beta X)$ $\alpha, \beta \in K$; $X \in V$
6) $1 \cdot X = X$ $1 \in K$, $X \in V$

OBS.

1) Los elementos de V se llaman vectores y los elementos de K se llaman escalares

2) Si V es un espacio vectorial sobre K, entonces si $K = \mathbb{R}$ se dice que V es un espacio vectorial real.
Si $K = \mathbb{C}$ se dice que V es un espacio vectorial complejo.

Ejemplo 25:
1) Sea $\mathbb{R}^n = \{X \,/\, X = (X_1, \ldots\ldots X_n) \;;\; X_i \in \mathbb{R} \quad \forall_i\}$
y definamos en $\mathbb{R}^n$ la + y $\cdot$ mediante:

$$X + Y = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \ldots\ldots, X_n + Y_n)$$

$$\alpha X = (\alpha X_1, \alpha X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha X_n) \qquad ; \alpha \in \mathbb{R}$$

entonces $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real

2) Sea $\mathcal{C}[a,b] = \{F \,/\, F : [a,b] \longmapsto \mathbb{R},\ F \text{ continua}\}$
y definamos en $\mathcal{C}[a,b]$, la + y $\cdot$ mediante:

$(F + g)(X) = F(X) + g(X)$

$(\alpha \cdot F)(X) = \alpha(F(X))$

Entonces $\mathcal{F}[a,b]$ es un espacio vectorial real

3) Sea $\mathcal{P} = \{P(X) \;/\; P(X) = a_0 X^0 + a_1 X^1 + \ldots + a_n X^n;\ a_i \in \mathbb{R}\}$ y definamos la + y $\cdot$ en $\mathcal{P}$ como en el álgebra elemental.
Entonces $\mathcal{P}$ es un espacio vectorial

Ejemplo 26.

Sea $V = \{(a,b) \;/\; a,b \in \mathbb{R}^+\}$ y definamos

$(a,b) + (a_1, b_1) = (a\,a_1,\ b\,b_1)$

$\lambda(a,b) = (a^\lambda, b^\lambda)$

¿ V es un e.v. sobre $\mathbb{R}$?

1) $V \neq \emptyset$

$(1,1) \in V \quad ; \quad 1 \in \mathbb{R}^+$

2) V es cerrado respecto de +

$X, Y \in V \Longrightarrow X + Y \in V$

$X + Y = (a,b) + (a_1, b_1) = (aa_1, bb_1)$

con $aa_1, bb_1 \in \mathbb{R}^+$

3) + es conmutativa

$X, Y \in V \Longrightarrow \quad X + Y = (a, b) + (a_1, b_1)$

$= (aa_1, bb_1) = (a_1 a, b_1 b)$

$= (a_1, b_1) + (a,b) = Y + X$

4) + es asociativa

$X, Y, Z \in V \Longrightarrow \quad X + (Y + Z) = X + (a_1 a_2, b_1 b_2)$

$= ((aa_1 a_2), (bb_1 b_2))$

$= (aa_1, bb_1) + (a_2, b_2)$

$= (X + Y) + Z$

5) Neutro aditivo 0 es (1,1)

$X + 0 = 0 + X = X \qquad$ con $0 = (1,1)$

$(a,b) + (1,1) = (a1, b1) = (a,b)$

6) Inverso

$X + X^{-1} = 0$, $X \in V$ y $X^{-1} = (1/a\ ,\ 1/b)$

$(a,b) + (1/a\ ,\ 1/b) = (a\ 1/a\ ,\ b\ 1/b) = (1,1)$

Luego se tiene $(V, +)$ es grupo abeliano

7) V es cerrado para •

$\lambda \in \mathbb{R},\quad X \in V \Longrightarrow \lambda X \in V$

$\lambda(a,b) = (a^{\lambda}, b^{\lambda})$ con $a^{\lambda}, b^{\lambda} \in \mathbb{R}^{+}$

8) Distributividad del escalar

$\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y \quad ; \quad X, Y \in V \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda(X + Y) = \lambda\left[(a,b) + (a_1, b_1)\right]$

$= \lambda\left[aa_1, bb_1\right] = \left[(aa_1)^{\lambda}, (bb_1)^{\lambda}\right]$

$= \left[a^{\lambda} a_1^{\lambda}, b^{\lambda} b_1^{\lambda}\right] = (a^{\lambda}, b^{\lambda}) + (a_1^{\lambda}, b_1^{\lambda})$

$= \lambda X + \lambda Y$

9) Distributividad del vector.

$(\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X \quad ; \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ X \in V$

$(\alpha + \beta) X = (\alpha + \beta)(a,b) = (a^{\alpha+\beta}, b^{\alpha+\beta}) = (a^{\alpha} a^{\beta}, b^{\alpha} b^{\beta})$

$= (a^{\alpha}, b^{\alpha}) + (a^{\beta}, b^{\beta}) = \alpha X + \beta X$

10) $-(\alpha\beta) X = \alpha(\beta X)$

$(\alpha\beta) X = (\alpha\beta)(a,b) = (a^{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}) = \left[(a^{\beta})^{\alpha}, (b^{\beta})^{\alpha}\right]$

$= \alpha(a^{\beta}, b^{\beta}) = \alpha(\beta X)$

11) Existe el escalar 1

$1X = X \quad ; \quad X \in V$

$1X = 1(a,b) = (a^{1}, b^{1}) = (a,b) = X$

Luego por 1), 2),.....11), se tiene que V es un espacio vectorial real.

Veamos algunas consecuencias de la definición de espacio vectorial.

1.41.- PROP. Sea V e.v. sobre K, entonces:

1) $\exists !\ 0 \in V$ tal que $0 + X = X + 0 = X \quad \forall\ X \in V$

2) $\exists !\ (-X) \in V$ tal que $X + (-X) = (-X) + X = 0$ Inverso aditivo

3) La suma $(X_1 + X_2 + \ldots\ldots\ldots + X_n) \in V$; $X_i \in V$ está bien definida

4) $X + Y = Z + Y \Longrightarrow X = Z \quad ;\ X,\ Y,\ Z \in V$

5) $-(-X) = X \quad ;\ X \in V$

6) $-(X + y) = -X - Y \quad ;\ X,\ Y \in V$

7) $-X = -Y \Longleftrightarrow X = Y \quad ;\ X,\ Y \in V$

8) $X + Y = 0 \Longrightarrow Y = -X \quad ;\ X,\ Y \in V$

Dem.: 5) pd $-(-X) = X$

$$-(-X) = -(-X) + 0 = -(-X) + [X + (-X)] = -(-X) + ((-X) + X)$$

$$= (-(-X) + (-X)) + X = 0 + X = X$$

El resto de las demostraciones se deja de ejercicio.

1.42. PROP. SEa V e.v. sobre K, entonces:

1) $0 \cdot X = 0 \quad \forall\ X \in V$

2) $\alpha \cdot 0 = 0 \quad \forall \alpha \in K$

3) $(-1)\ X = -X \quad \forall\ X \in V$

4) $\alpha \cdot X = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \quad \vee \quad X = 0 \quad ;\ X \in V,\ \alpha \in K$

5) $\alpha X = \beta X \Longleftrightarrow X = 0 \quad \vee\ \alpha = \beta\ ;\ \alpha, \beta \in K,\quad X \in V$

6) $(-\alpha X) = -(\alpha X) \quad :\quad \alpha \in K,\ X \in V$

Dem. 1) pd. $0X = 0$

Sabemos que : $(\alpha + \beta)\ X = \alpha X + \beta X$

hacemos $\alpha = \beta = 0$

entonces: $(0 + 0)X = 0X + 0X$

$$0X = 0X + 0X$$

$$0X - 0X = oX + oX - oX$$

$$0 = oX + 0$$

$$\therefore \quad 0X = 0$$

2) p.d. $\alpha\cdot 0 - 0$

Sabemos que : $\alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y$

hacemos $X = Y = 0$

entonces $\alpha(0+0) = \alpha 0 + \alpha 0$

$$\alpha 0 = \alpha 0 + \alpha 0$$

$$\alpha 0 - \alpha 0 = \alpha 0 + \alpha 0 + \alpha 0 - \alpha 0$$

$$0 = \alpha 0 + 0$$

$$\therefore \quad \alpha\cdot 0 = 0$$

3) p.d: $(-1)X = -X$

Sabemos que $1X = X \wedge 0\cdot X = 0$

$$X + (-1)X = 1X + (-1)X$$

$$= (1 + (-1)X$$

$$= 0X$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad (-1)X = -X$$

El resto de las demostraciones se dejan de ejercicio.

OBS. En lugar de escribir $X+(-Y)$ escribiremos $X-Y$

1.43.- EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Hacer las demostraciones dejadas de ejercicio

2.- Demostrar que son e.v. los conjuntos del ejemplo

3.- Pruebe que los siguientes conjuntos son e.v.

a) M_{mxn} sobre $\mathbb{R}$ con + y , usual

b) $\mathcal{P}^n[a,b]$ sobre R con + y $\cdot$ usual

c) El conjunto de todas las soluciones de la ecución diferencial.

$$a_0(X)\frac{d^nY}{dX^n} + a_1(X)\frac{d^{n-1}Y}{dX^{n-1}} + \cdots\cdots + a_n(X)\cdot Y = 0$$

d) El conjunto de todas las soluciones "Y" son de la ecuación integral

$$\int_0^a F(X,t)\,Y(t)dt + \lambda\,Y(X) = 0 \quad ;\ 0 \leq Y \leq a$$

donde $F(X,t)$ es contínua en X,t y está dada, además λ dado.

e) $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$ para las operaciones

$$X + Y = XY \quad : \quad X, Y \in \mathbb{R}^+$$
$$\alpha X = X^{\alpha} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \wedge X \in \mathbb{R}^+$$

f) $V = \{P(X) \,/\, P(1) = 0 \;;\; \text{grad } P(X) \leq 2\}$ sobre $\mathbb{R}$ con la + y · usual

4.- Son espacios vectoriales los conjuntos siguientes?

a) $V = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones

$$X+Y - (X_1,Y_1) + (X_2,Y_2) = (X_1 + Y_1\ ,\ X_2 + Y_2)$$
$$\alpha(X) = X$$

b) $V = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones

$$X+Y = (X_1,\ Y_1) + (X_2,\ Y_2) = (X_1 + X_2, 0)$$

αX lo usual

c) $V = \{F \in \mathcal{C}[a,b] \,/\, F(a) = F(b)\}$ sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales.

d) $V = \{F \in \mathcal{C}[a,b] / \ F(a+X) = F(b-X)\}$ sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales.

e) $V = \{Y/Y \text{ es la solución de } \dfrac{dY}{dX} + \alpha Y = 1\}$ sobre $\mathbb{R}$ con con las operaciones usuales

f) $V = \left\{R(X) \,/\, R(X) = \dfrac{P_m(X)}{Q_n(X)}\ ,\ m,n \text{ finitos}\right\}$ sobre $\mathbb{R}$ + Y · usual.

5.- Encuentre el valor de :

$\alpha_1, X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$ en $\mathbb{R}^4$ cuando

a) $X_1 = (2,0,-1,3)$, $X_2 = (1,-2,2,0)$

$X_2 = (2,-1,3,1)$, $\mathcal{L}_1 = -1.$ $\mathcal{L}_2 = 0.$ $\mathcal{L}_3 = 1$

b) $X_1 = (1,2,3,4)$, $X_2 = (0,2,1,-2)$

$X_3 = (2,6,7,6,)$, $\mathcal{L}_1 = 2$; $\mathcal{L}_2 = 1$, $\mathcal{L}_3 = -1$

6.- Encontrar el valor de

$\mathcal{L}_1\ p_1 + \mathcal{L}_2\ p_2 + \mathcal{L}_3\ p_3$ en $\mathcal{P}$ cuando

a) $p_1(X) = X^2 - X + 1$; $\mathcal{L}_1 = 2$

$p_2(X) = 3X^3 + 2X^{-1}$; $\mathcal{L}_2 = -1$

$p_3(X) = -X^3 + 2X$; $\mathcal{L}_3 = -2$

b) $p_1(X) = 2X^4 - 4X^2 + 1$; $\mathcal{L}_1 = 1/2$

$p_2(X) = -X^4 + 2X^3 + X^2 - X + 2$; $\mathcal{L}_2 = 2$

$p_3(X) = -X^4 + 4X^3 - 2X - 5/2$; $\mathcal{L}_3 = -1$

2.- SUBESPACIO VECTORIAL

2.1.- DEF. SUBESPACIO (s.e.v.)

Sea V un e.v. sobre K con las operaciones + y $\cdot$ y $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. entonces W es un subespacio, espacio vectorial de V si W con las operaciones + y $\cdot$ es un e.v. sobre K.

2.2.- NOTACION: Si W es un s.e.v. de V, lo denotaremos por $W \leq V$.

OBS. de la comprobación directa de cada uno de los axiomas de la definición de e.v. se concluye que $W \neq 0$ es un s.e.v. de V ssi:

1) $X, Y \in W \Longrightarrow X + Y \in W$
2) $0 \in W$
3) $X \in W \Longrightarrow - X \in W$
4) $\alpha \in K,\ X \in E \Longrightarrow \alpha X \in W$

La conmutatividad de la (+) y las propiedades restantes del producto escalar, $\cdot$, no es necesario comprobarlas ya + y $\cdot$ son operaciones en V y hereditarias en W.

2.3.- PROP. Sea V un e.v. sobre K y $W \subset V$, $W \neq \emptyset$, entonces.

$W \leq V \Longleftrightarrow \forall\ X, Y \in W \wedge \alpha \in K$ se tiene

$\alpha X + Y \in W$

Dem. ($\Longrightarrow$) supongamos que $W \leq V$

p.d. $\alpha X + Y \in W \quad \forall\ X, Y \in W,\ \alpha \in K$

En efecto:

$W \leq V \Longrightarrow$ W es un e.v. sobre K

$\Longrightarrow$ 1) $X, Y \in W \Longrightarrow X + Y \in W$

2) $X \in W, \alpha \in K \Longrightarrow \alpha X \in W$

en particular $\alpha X + Y \in W$

($\Longleftarrow$) Supongamos que $W \neq \emptyset$ y $\alpha X + Y \in W$

p.d. $W \leq V$ es decir que W es un e.v. sobre K

en efecto:

1) $W \neq \emptyset \Longrightarrow \exists X \in W$

$$\alpha X + Y \in W \Longrightarrow (-1)X + X \in W$$
$$\Longrightarrow [(-1) + 1] X \in W$$
$$\Longrightarrow 0 X \in W$$
$$\Longrightarrow 0 \in W$$

2) $X \in W, \alpha \in K \Longrightarrow \alpha X + 0 \in W$
$$\Longrightarrow \alpha X \in W$$

3) $X, Y \in W, \alpha \in K \Longrightarrow \alpha X + Y \in W$
$$\Longrightarrow X + Y \in W \qquad \text{con } \alpha = 1$$

4) $-X \in W, \alpha \in K \Longrightarrow \alpha X \in W$
$$\Longrightarrow -X \in W \qquad \text{con } \alpha = -1$$

Luego en la virtud de la OBS. de la Def. 2.1 y por 1,2,3 y 4 se tiene que W es un e.v. sobre K, por lo tanto $W \leq V$. $\square$

OBS. La Prop. 2.3. se puede redefinir por:

$W \leq V$ si $W \neq \emptyset$
$$X, Y \in W \Longrightarrow X + Y \in W$$
$$\alpha \in K, X \in W \Longrightarrow \alpha X \in W$$

2.4.- PROP. sea V un e.v. sobre K. Entonces:

1) $\{0\} \leq V$

2) $V \leq V$

Dem.

1) $\{0\} \neq \emptyset$
$$0 + 0 = 0 \in W$$
$$\alpha \cdot 0 = 0 \in W$$
$$\therefore \{0\} \leq V$$

2) Trivial

2.5.- DEF. SUBESPACIO PROPIO.

Sea V un e.v. sobre K. Entonces:

1) $\{0\}$ y V se llaman s.e.v. triviales de V
2) Si $W \neq V$, $W \neq \{0\}$ y $W \leq V$ entonces W se llama s.e.v. propio de V.

Ejemplo 1.- Sea $V = \mathbb{R}^3$ e.v. sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones + y $\bullet$ usuales. Entonces los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son:

1) Los triviales:
   $\mathbb{R}^3$: Espacio tridimensional
   $\{0\}$: El punto orígen del sistema tridimensional.
2) Los propios:
   W_1 : Planos que pasan por el orígen en particular $\mathbb{R}^2$
   W_2 : Rectas que pasan por el orígen en particular $\mathbb{R}$

Ejemplo 2.- Sea $V = \mathcal{C}^2[a,b]$ e.v. sobre $\mathbb{R}$

$W = \{ Y \,/\, Y'' + w^2 Y' = 0 \wedge \alpha Y(a) - \beta Y(b) = \{0\}$

¿ es $W \leq V$?

1) $Y = 0 \Longrightarrow 0 + w^2\, 0 = 0 \quad \wedge \quad \alpha\, 0 - \beta\, 0 = 0$
$\Longrightarrow Y = 0 \in W$
$\Longrightarrow W \neq \emptyset$

2) $Y_1, Y_2 \in W \Longrightarrow Y_1 + Y_2 \in W$

Tenemos que:

$$(Y_1 + Y_2)'' + w^2 (Y_1 + Y_2)' = Y_1'' + Y_2'' + w^2 Y_1' + w^2 Y_2'$$
$$= Y_1'' + w^2 Y'_1 + Y_2'' + w^2 Y_2'$$
$$= 0 + 0 = 0$$

$\alpha(Y_1+Y_2)(a) - \beta(Y_1+Y_2)(b) = \alpha(Y_1(a) + Y_2(a)) = \beta(Y_1(b) + Y_2(b))$

$$= [\alpha Y_1(a) - \beta Y_1(b)] + [\alpha Y_2(a) - \beta Y_2(b)]$$
$$= 0 + 0 = 0$$

$\therefore \quad Y_1 + Y_2 \in W$

3) $\lambda \in \mathbb{R} \wedge Y \in W \Longrightarrow \lambda Y \in W$

$$(\lambda Y)'' + w^2 (\lambda Y)' = \lambda Y'' + w^2 \lambda Y'$$
$$= \lambda[Y'' + w^2 Y'] = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$\alpha(\lambda Y)(a) - \beta(\lambda Y)(b) = \alpha\lambda Y(a) - \beta\lambda Y(b)$$
$$= \lambda[\alpha Y(a) - \beta Y(b)]$$
$$= \lambda 0 = 0$$

$\therefore \quad \alpha Y \in W$

Por lo tanto $W \leq V$

Ejemplo 3.- $V = \mathbb{R}^2$ e.v. sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales y $W = \{X \in \mathbb{R}^2 / X_1 = 1 + X_2\}$

¿Es $W \leq V$?

Sol 1) $W \neq \emptyset$

Sea $X = (2,1) \Longrightarrow X_1 = 1 + X_2$

$\Longrightarrow X \in W$

2) $X, Y \in W \Longrightarrow X + Y \in W$

$$X + Y = (X_1, X_2) + (Y_1 + Y_2)$$
$$= (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} X \in W \Longrightarrow X_1 = 1 + X_2 \\ Y \in W \Longrightarrow Y_1 = 1 + Y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1 + Y_1 = 1 + (X_2 + Y_2) + 1$$

$\therefore \quad X + Y \notin W$

Luego $W \not\leq V$

2.6.- PROP. Sea V e.v. sobre K y $W_1, W_2 \leq V$. Entonces $W_1 \cap W_2 \leq V$

Dem.

1) $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} W_1 \leq V \Longrightarrow \exists\, X = 0 \in W_1 \\ W_2 \leq V \Longrightarrow \exists\, X = 0 \in W_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow X \in W_1 \cap W_2$$

2) $X, Y \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow X+Y \in W_1 \cap W_2$

$X, Y \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow X \in W_1 \wedge Y \in W_1$

$\Longrightarrow X \in W_2 \wedge Y \in W_2$

$\Longrightarrow X + Y \in W_1$

$X + Y \in W_2$

$\Longrightarrow X + Y \in W_1 \cap W_2$

3) $\alpha \in K \wedge X \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow \alpha X \in W_1 \cap W_2$

$\alpha \in K \wedge X \in W_1 \cap W_2 \Longrightarrow X \in W_1 \wedge \alpha X \in W_1$

$X \in W_2 \wedge \alpha X \in W_2$

$\Longrightarrow \alpha X \in W_1 \cap W_2$

Luego: $W_1 \cap W_2 \leq V$

Generalicemos este hecho a una colección de s.e.v.

2.7.- PROP. Sea V un e.v. sobre K y sea la colección $\{W_a\}$ de subespacios de V. Entonces:

$$\bigcap_a W_a \leq V$$

Dem. se deja de ejercicio.

Problema: Si V es un e.v. sobre K y W_1, $W_2 \leq V$, ¿qué puede decir de $W_1 \vee W_2$?

Ejemplo 4.- Sea $V = M_{2x2}$ e.v. sobre $\mathbb{R}$ con la + y $\cdot$ Usual y $W_1 = \left\{A/A = \begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$

$W_2 = \left\{B/B = \begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$

Entonces: $W_1, W_2 \leq V$ y $W_1 \cap W_2 \leq V$

$W_1 \cap W_2 = \left\{C/C = \begin{pmatrix} a & o \\ o & o \end{pmatrix};\ a \in \mathbb{R}\right\}$

Sabemos cuando W es un s.e.v. de e.v. dado V. El problema ahora es encontrar todos los s.e.v. de V.

En efecto: Sea $S \neq \phi$, $S \subset V$

Entonces $\exists W \leq V$ tal que $S \subset W$, por lo menos $\hat{V}$

Deseamos encontrar el subespacio mínimo que contenga a S, es decir el subespacio que contenga a S y a la vez que esté contenido en cada subespacio de V que contiene a S.

Para probar que tal subespacio existe, consideremos todos los subespacios de V que contiene a S y denotaremos por H al conjunto de vectores que pertenecen a cada subespacio.

Por lo tanto $H = \bigcap_a W_a$; $W_a \leq V$: $S \subset W_a$

y por lo PROP. 2.7. se tiene que $H \leq V$

Además por la definicón de H se tiene que $\nexists U \leq V$ tal que $S \subset U$ y $U \subset H$.

Luego H es el subespacio deseado.

Entonces hemos probado que de la Prop. 2.7. se deduce que si $S \subset V$, existe un subespacio mínimo que continen a S y que está contenido en todo subespacio que contiene a S.

2.8.- DEF. SUBESPACIO GENERADO.

Sea V un e.v. sobre K y $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. Entonces el subespacio generado por S se define como la intersección de todos los subespacios que contienen a S.

OBS. Si S es finito, $S = \{X_1, X_2 \ldots\ldots X_n\}$ con los $X_i \in V$. Entonces el espacio generado por S, se llama espacio generado por los vectores $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$

2.9. NOTACION: El espacio generado por S se denota por $\langle S \rangle$ y

Si $S = \{x_1, \ldots\ldots, x_n\}$ entonces denotaremos por $\langle\{x_1 \ldots x_n\}\rangle$

Ahora debemos encontrar un método que nos permita caracterizar al espacio generado por S, $\langle S \rangle$, para poder seguir en el estudio de los subespacios.

Tal método existe y se apoya en el concepto de combinación lineal.

2.10. DEF. COMBINACIÓN LINEAL (c.l.)

Una expresión de la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n$$

Se llama combinación lineal si existen los escalares $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$

2.11. DEF. VECTOR COMO UNA c.l.

Sea V un e.cv. sobre K y $u \in V$. Entonces decimos que u es una combinación lineal de los vectores $V_1, V_2 \ldots V_n$ V si existe escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$

Tal que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots\ldots + \lambda_n V_n$$

<u>Ejemplo 5</u>. Sea $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$

$$u = (2,4) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ V_1 = (1,0); \ V_2 = (1,1)$$

Entonces

$$u = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$$

$$= -2\,(1,0) + 4(1,1)$$

$$\exists\ \lambda_1 = -2\ ,\ \lambda_2 = 4$$

Luego (2,4) se escribe como una combinación lineal de (1,0) y (1,1).

OBS. Es claro, que dado un conjunto de vectores de un e.v. hay infinitas combinaciones lineales que pueden formarse con ellos. Así por ejemplo para los vectores V_1, V_2, $V_3 \in V$, alguna de las combinaciones lineales son:

$3V_1 + (-5)V_2 + 0V_3$: $(-1/3)\ V_1 + \sqrt{2}\ V_2 + \pi V_3$; $0V_1 + 0V_2 + 0V_3$

<u>Ejemplo 6</u>.- Sean $V = \mathbb{R}^3$; $K = \mathbb{R}$ y los vectores

$$V_1 = (2,1,0)\ ;\quad V_2 = (3,-2,4);\quad V_3 = (5,-1,4)$$

Entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales de v_1, v_2, v_3 es:

$$U = \{u/u = \alpha(2,1,0) + \beta(3,-2,4) + \gamma(5,-1,4);\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$$

Es claro que $U \subset \mathbb{R}^3$

¿es $U \leq \mathbb{R}^3$?

<u>2.12.- PROP</u>. Sea V. un e.v. sobre K y V_1, $V_2 \dots V_n \in V$ Entonces:

1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda'_i) v_i$

con $\lambda_i, \lambda'_i \in K$

2) Si $\alpha \in K$ y $\lambda_i \in K$

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i)\, v_i$$

Dem.:

Si $\lambda_i, \lambda'_i \in K \Longrightarrow (\lambda_i + \lambda'_i) \in K$

$\lambda_i \in K, \alpha \in K \Longrightarrow \alpha\lambda_i \in K$

y además por la asociatividad de la + y la distributividad del • se cumple trivialmente 1) y 2)

OBS. Si se conoce S, entonces se puede encontrar $\langle S \rangle$, expresando a todo vector de $\langle S \rangle$ como combinación lineal de los $X_i \in S$

2.13.- PROP. Sea V un e.v. sobre K, $S \neq \emptyset$, SCV. Entonces $\langle S\rangle$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores de S.

$$\langle S\rangle = \left\{Y/Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \ ; \ X_i \in S, \ \lambda_i \in K\right\}$$

Dem.

1) Sea $W = \langle S\rangle$, entonces toda c.l.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$$ con $X_i \in S$ evidentemente pertenece a W, $y \in W$.

Luego si $H = \left\{u/u = \sum_{i=1}^{u} \lambda_i X_i \ ; \ X_i \in S\right\}$

Se tiene $H \subset W$

2) Además $H \leq V$. en efecto

$S \subset H \Longrightarrow H \neq \emptyset$

$Y_1, Y_2 \in H \Longrightarrow Y_1 + Y_2 \in H$ (por 2.12)

$\alpha \in K, \ Y \in H \Longrightarrow \alpha Y \in H$

Por lo tanto hemos demostrado que $H \leq V$ tal que SCH, y que todo subespacio que contiene a S contiene a H. Luego H es la intersección de todos los subespacios que contienen a S, es dedir H es el subespacio generado por S.

$H \leq V$ tal que $S \subset H$ y $H \subset W_a$ donde $W_a \leq V$ que

$$S \subset W_a \Longrightarrow H = \cap W_a$$

$$\Longrightarrow H = \langle S\rangle$$

Ejemplo 7. Sea $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$ y las operaciones usuales

1) $S = \{(1,1,1)\} \Longrightarrow \langle S\rangle = \{X/X = \lambda(1,1,1), \lambda \in \mathbb{R}\}$
recta que pasa por orígen y (1,1,1)

2) $S_1 = \{V\}$ entonces

Si $V \neq 0 \Longrightarrow \langle S_1 \rangle = \{X / X = \lambda V, \lambda \in \mathbb{R}\}$ rectas

Si $V = 0 \Longrightarrow \langle S \rangle = \{(0,0,0)\}$ orígen

3) $S_2 = \{V_1 W\}$ entonces

$\langle S_2 \rangle = \{X / \alpha V + \beta W ; \alpha_1 \beta \in \mathbb{R}\}$ planos

Ejemplo 8. Sea $V = \mathbb{R}^2$; $K = \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$

$S = \{(1,3), (2,2)\}$

1) $(4,5) \in \langle S \rangle$

En efecto

$$(4,5) \in \langle S \rangle \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ty } (4,5) = \alpha(1,3) + \beta(2,2)$$
$$\Longleftrightarrow (4,5) = (\alpha + 2\beta, 3\alpha + 2\beta)$$
$$\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha + 2\beta = 4 \\ 3\alpha + 2\beta = 5 \end{array}\right\}$$
$$\Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 7/4$$

2) $\langle S \rangle = \{X / \alpha(1,3) + \beta(2,2) + \alpha(2,2) \; ; \alpha_1 \beta \, \mathbb{R}\}$

$$X = (a,b) \in \langle S \rangle \Longleftrightarrow (a,b) = \alpha(1,3) + \beta(2,2)$$
$$\Longleftrightarrow (a,b) = (\alpha + 2\beta, 3\alpha + 2\beta)$$
$$\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} a = \alpha + 2\beta \\ b = 3\alpha + 2\beta \end{array}\right\}$$
$$\Longleftrightarrow \alpha = \frac{b-a}{2} ; \quad \beta = \frac{3a-b}{4}$$

3) $\langle S \rangle \leq V$

Demostración de ejercicio.

2.14.- DEF. SUMA DE SUBCONJUNTOS.

Sea V un e.v. sobre K, $S_1, S_2 \ldots\ldots, S_n$ CV. Entonces el conjunto de todas las sumas:

$X_1 + X_2 \ldots\ldots X_n$ de vectores $X_i \in S_i$, se llama suma de los subconjuntos $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_n$ y se denota por:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = S_1 + S_2 + \ldots\ldots + S_n$$

2.15.- DEF. SUMA DE LOS SUBESPACIOS.

Sea V un e.v. sobre K y W_1, $W_2 \leq V$ entonces:

$$W_1+W_2 = \{X/X = w_1+w_2 \ ; \ w_1 \in W_1 \ y \ w_2 \in W_2\}$$ es la suma de los subespacios w_1 y w_2

2.16.- PROP. Sea V un e.v. sobre K y $w_1, w_2 \leq V$

Entonces: $W_1 + W_2 \leq V$

DEm.

1) $W_1+W_2 \neq \emptyset$

$W_1 \leq V \Longrightarrow 0 \in W_1$

$W_2 \leq V \Longrightarrow 0 \in W_2$

Luego $0 = 0+0 \in W_1 + W_2$

2) $X, Y \in W_1+W_2 \Longrightarrow X+Y \in W_1+W_2$

$x \in W_1+W_2 \Longrightarrow X = w_1+w_2$

$Y \in W_1+W_2 \Longrightarrow Y = w'_1+w'_2$

Luego $X+Y = (w_1+w'_1) + (w_2+w'_2) \in W_1+ W_2$

ya que $w_1+w'_1 \in W_1$

$w_2+w'_2 \in W_2$

3) $\lambda \in K$, $X \in W_1+W_2 \Longrightarrow \lambda X \in W_1 + W_2$

$X \in W_1+W_2 \Longrightarrow X = w_1+w_2$

$\Longrightarrow \lambda X = (\lambda w_1) + (\lambda w_2) \in W_1+W_2$

2.17. DEF. SUMA DE n-SUBESPACIOS

Sea V un e.v. sobre K y $W_1, W_2, \ldots. W_n \leq V$. Entonces se define la suma de los W_i por:

$$W_1+W_2+\dots\dots+W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$
$$= \{X/X = w_1+w_2\dots+w_n;\ w_i \in W_i\}$$

2.18.- PROP. Sea V un e.v. sobre K y $W_1, W_2 \dots W_n \in V$

Entonces:
$$\sum_{i=1}^{n} W_i \leq V$$

Dem. Se deja de ejercicio

2.19. PROP. Sea V. un e.v. sobre K y $W_1 W_2 \leq V$. Entonces W_1+W_2 es el menor subespacio de V que contiene a W_1 y W_2.

Dem.

1) p.d.: $W_1, W_2 \subset W_1+W_2$

En efecto: Sea $X \in W_1 \Longrightarrow X = X+0$ con $\theta \in W_2$
$$\Longrightarrow X \in W_1+W_2$$
$$\Longrightarrow W_1 \subset W_1+W_2$$

Sea $Y \in W_2 \Longrightarrow Y = 0+Y$ con $\theta \in W_1$
$$\Longrightarrow Y \in W_1+W_2$$
$$\Longrightarrow W_2 \subset W_1+W_2$$

2) p.d. $W_1+W_2 = \langle W_1, W_2 \rangle$

Por ser el espacio generado el subespacio mínimo que contiene a W_1 y W_2

En efecto

a) Sabemos que $W_1+W_2 \leq V$ y $W_1, W_2 \subset W_1+W_2$

luego $W_1+W_2 \subset \langle W_1+W_2 \rangle$

$X \in W_1+W_2 \Longrightarrow X = w_1+w_2$; $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$
$$=\!= X \in \langle w_1+w_2 \rangle$$

b) Se tiene que $w_1+w_2 \leq V$ y $w_1, w_2 \subset W_1+W_2$

Luego $\langle W_1+W_2\rangle \subset W_1+W_2$

$$z \in \langle W_1+W_2\rangle \Longrightarrow z = \lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2$$

$$\Longrightarrow z = x_1+x_2 \quad \text{con } x_1 = \lambda_1 w_1 \in W_1$$

$$x_2 = \lambda_2 w_2 \in W_2$$

$$\Longrightarrow z \in W_1+W_2$$

Por lo tanto a y b se tiene que:

$$\langle w_1+w_2\rangle = W_1+W_2$$

Luego W_1+W_2 es el subespacio mínimo que contiene a W_1 y W_2

2.20.- PROP. Sea V un e.v. sobre K y $W_1, W_2 \ldots W_n \leq V$

Entonces $W_1+W_2+\ldots\ldots W_n$ es el subespacio mínimo que contiene a cada W_i; $i = 1,2,\ldots.n$.

Dem.: se deja de ejercicio.

Ejemplo 10.- Sea $V = M_{2x2}$; $K = \mathbb{R}$

$$W_1 = \left\{A/A = \begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix}\right\} \leq V$$

$$W_2 = \left\{B/B = \begin{pmatrix} a & o \\ b & o \end{pmatrix}\right\} \leq V$$

Entonces:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{C/C = \begin{pmatrix} a & o \\ o & o \end{pmatrix}\right\} \leq V$$

$$W_1+W_2 = \left\{D/D = A_1+A_2 \; ; \; A_1 \in W_1 \text{ y } A_2 \in W_2\right\}$$

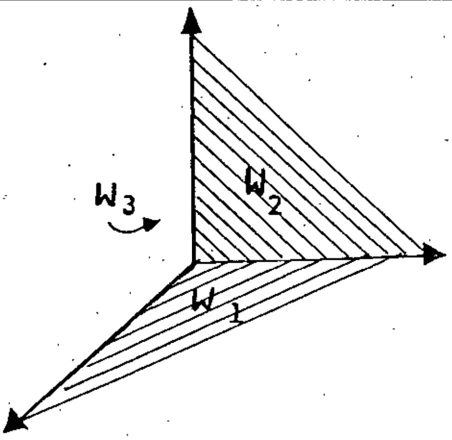
$$W_1+W_2 = \left\{D/D = \begin{pmatrix} e & b \\ b & o \end{pmatrix}\right. \leq V$$

De ejercicio probar los subespacios mencionados.

Ejemplo 11.- Sea $V = \mathbb{R}^3$; $K = \mathbb{R}$

$$W_1 = \Pi_{xy} \leq \mathbb{R}^3$$

$$W_2 = \Pi_{yz} \leq \mathbb{R}^3$$



Entonces:

$$W_1 = \{X/X = (a,b,o)\}$$

$$W_2 = \{Y/Y = (o,b,c)\}$$

$W_3 = W_1 \cap W_2 = \{Z/Z = (o,o,c)\} \leq \mathbb{R}^3$ (eje Z)

$\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ ya que $u \in \mathbb{R}^3$

$u = X+Y$; $X \in W_1$, $Y \in W_2$

Así por ejemplo $u = (1,4,5)$

$(1,4,5) = (1,2,0) + (0,2,5)$

ó $(1,4,5) = (1,6,0) + (0,-2,5)$

Se observa que u no tiene una escritura única.

2.21. DEF. SUMA DIRECTA.

Sea V un e.v. sobre K y $W_1, W_2 \leq V$ entonces se llama suma directa al subespacio.

$W_1+W_2 = \{v/v = w_1+w_2 \text{ ; } w_1 \in W_1 \text{; } w_2 \in W_2 \text{ y } w_1, w_2 \text{ son únicos}\}$

y lo denotaremos por $W_1 \oplus W_2$

2.22. DEF. UN e.v. COMO SUMA DIRECTA.

Sea V un e.v. sobre K. Entonces se dice que V es suma directa de los subespacios W_1, W_2 si todo vector de V puede escribirse en una y solamente una forma.

$$v = w_1 + w_2 \quad ; \quad w_1 \in W_1 \quad ; \quad w_2 \in W_2$$

y se denota por $V = W_1 \oplus W_2$

Ejemplo 12. Del ejemplo 11 se tiene que

$$\mathbb{R}^3 \neq W_1 \oplus W_2$$

Si $W_3 = \{Z/Z = (0,0,c)\}$ (eje Z)

se tiene que $u \in R \Longrightarrow u = X+Z$;; $X \in W_1$, $Z \in W_3$

$u = (a,b,o) + (0,0,c)$ en forma única

luego $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_3$

2.23.- PRO. Sea V un e.v. sobre K y $W_1, W_2 \leq V$

Entonces $V = W_1 \oplus W_2 \Longleftrightarrow V = W_1 + W_2$

$W_1 \cap W_2 \{0\}$

Dem ($\Longrightarrow$) supongamos $V = W_1 \oplus W_2$

p.d.: $V = W_1 + W_2 \wedge W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$

En efecto:

1) $V = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow v \in V$, $v \in W_1 \oplus W_2$

$\Longrightarrow v = W_1 + W_2$ en forma única

$\Longrightarrow v \in W_1 + W_2$

2) Sea $v \in W_1 \oplus W_2$ y $v \in W_1 \cap W_2$

entonces $v = v + 0$ con $v \in W_1$, $0 \in W_2$

$v = 0 + v$ con $0 \in W$, $v \in W_2$

luego $v = 0$ por escribirse en forma única $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

($\Longleftarrow$) p.d. $V = W_1 \oplus W_2$

En efecto $v \in W_1 + W_2 \Longrightarrow v = w_1 + w_2$ con $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$

Debemos probar que v se escribe en forma única

supongamos $v = w_1' + w_2'$ con $w_1' \in W_1$ y $w_2' \in W_2$

entonces $v = w_1 + W_2 \Longrightarrow w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$

$v = w_1' + w_2'$

como $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ y $w_1 - w_1' \in W_1$ y $w_2' - w_2 \in W_2$

se tiene $w_1 = w_1' \wedge w_2 = w_2'$

luego $v = w_1 + w_2$ en forma única

por lo tanto $V = W_1 \oplus W_2$

2.24. EJERCICIO PROPUESTOS.

1) Hacer las demostraciones pendientes
2) Son subespacios de $\mathbb{R}^3$ los subconjuntos:

$A = \{(X,Y,Z) \ / \ Y = 2X + Z\}$
$B = \{(X,Y,Z) \ / \ Z = X - Y\}$

3) Son subespacios de $V = \{f/f : s \longrightarrow \mathbb{R}\}$?

$W_1 = \{f/f\ (3) = 0\}$

$W_2 = \{f/f\ (-X) = f(X)\}$

4) Son subespacios de $\mathcal{C}^n[a,b]$?

$A = \{f/f'' + wf = 0 \wedge f'(a) = f'(b)\}$
$B = \{f/f'' + w^2 f = 0 \wedge f'(a) = f'(b);\ f(a) = 0\}$
$c = \{f/f'' + f'f = 0\}$

5) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \{X \in \mathbb{R}^2 / \ X_1 = 1 + X_2\}$

¿ $W \leq V$?

6) Encuentre $\langle S \rangle$ donde $S \subset \mathbb{R}^5$ y
$S = \{(1,2,0,3,0),\ \ (0,0,1,4,0),\ \ (0,0,0,0,1)\}$

7) $V = M_{3x3}$ y $K \subset \mathbb{R}$

$W_1 = \{A/A$ es simétrica$\}$

$W_2 = \{A/A$ es antisimétrica$\}$

¿ $W_1 \leq V$, $W_2 \leq V$?

¿ $V = W_1 \oplus W_2$?

8) Si $X = (1,2,0,-3)$, $Y = (4,3,4,-16)$
Expresar a $Z = (7,3,-4,5)$ como una c.l. de X e Y

9) Hallar un vector común de los subespacios
$\langle\{(1,2,3), (3,2,1)\}\rangle$ y $\langle\{(1,0,1), (3,4,3)\}\rangle$

10) Si $S = \{(-1,2,1,3), (2,-4,-3,2)\}$
¿$(6,-12,-10,14) \in \langle S\rangle$?

11) Sea V e.v. sobre K y S, TCV
Pruebe que
Si $S \subset \langle T\rangle \Longrightarrow \langle S\rangle \subset \langle T\rangle$

12) Sea V ev sobre K y $W_1, W_2 \leq V$ tal que
$W_1 = \langle\{X_i\}^n\ i = 1\rangle$
$W_2 = \langle\{Y_j\}^n\ j = 1\rangle$
Pruebe que
$W_1 + W_2 = \langle\{X_i, Y_i\}\rangle$

13) Que valores deben tener X,Y para
$(1,X,4,Y) \in \langle (2,-1,2,3), (1,3,2,1)\rangle$

14) Sean
$W = \left\{Q(x) \;/\; Q(x) \in P_n[x] \;;\; \left(\frac{d^2}{dx^2}\right)\left(Q(x)\right) = 0\right\}$
a.- $W \leq P_n(x)$?
b.- Encuentre un conjunto generador de W

3.- BASE Y DIMENSION

Ahora pasamos a la tarea de datar de dimensión a ciertos espacios vectoriales, aunque usualmente asociamos "dimensión" con algo geométrico, debemos encontrar una definición algebraica apropiada para la dimensión de un espacio vectorial. Esto se hará mediante el concepto de base de un espacio.

Sea V yn e.v. sobre K y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$, $v \in V$

Entonces sabemos que:

si $v \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle \Longrightarrow \exists \lambda_i \in K$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$

Además si $W \leq V \Longrightarrow 0 \in W$

Luego $0 = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$

3.1. DEF. COMBINACION LINEAL TRIVIAL.

Si en una c.l. todos los escalares son nulos, entonces llamaremos a éste, combinación lineal trivial.

Ejemplo 1.- Sea $S = \{(2,4), (5,-4)\} \subset \mathbb{R}^2$

Entonces la combinación lineal trivial de S es:

$$0\,(2,4) + 0\,(5,-4)$$

ProblemA : Si se tiene que:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

¿Existen escalares λ_i, de manera que se tenga una combinación lineal diferente de la trivial de modo que se cumpla la igualdad?

Ejemplo 2. Sea $A = \{(1,2,3), (-1,-1,1), (1,3,7)\}$

Entonces:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_1(1,2,3) + \lambda_2(-1,-1,1) + \lambda_3(1,3,7) = 0 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{array}$$

El sistema tiene solución diferente de la trivial.

Si $\lambda_3 = 1 \Longrightarrow \lambda_1 = -2 \quad ; \quad \lambda_2 = -1$

Luego existe una c.l. diferente de la trivial.

3.2. DEF. DEPENDENCIA LINEAL (L.D.)

Sea V un e.v. sobre K, SCV. Entonces S se dice linealmente dependiente si existen vectores diferentes $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ tal que

$$\lambda_1 . v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots\ldots + \lambda_n v_n = 0$$

Con la condición que los escalares no son todos nulos.

OBS. Si S es finito y L.D. entonces diremos simplemente que los vectores $v_1, v_2, \ldots. v_n$ son L.D.

3.3.- DEF. INDEPENDENCIA LINEAL (L.I.)

Sea V un e.v. sobre K y SCV. Entonces S se dice linealmente independiente si existen vectores $v_1, v_2, \ldots. v_n \in S$ tal que

Si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots\ldots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \ldots = \lambda_n = 0$

con los $\lambda_i \in K$

OBS. Si S es finito y L.I. entonces diremos que los vectores $v_1, v_2, \ldots v_n$ son L.I.

De las definiciones de dependencia e independencia lineal se concluye triavialmente lo siguiente:

3.4. PROP. Sea V un e.v. sobre K y S, S_1, S_2 CV

Entonces:

1) Si $0 \in S \Longrightarrow S$ es L.D.

2) Si $S = \{v\}$ con $v \neq 0 \Longrightarrow S$ es L.I.

3) Si S es L.D. y $S \subset S_1 \Longrightarrow S_1$ es L.D.

4) Si S es L.I. y $S_2 \subset S \Longrightarrow S_2$ es L.I.

Dem. se deja de ejercicio.

Ejemplo 3.- Sea $V = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}$ y $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^4$

$$X_1 = (1,3,-1,2)$$

$$X_2 = (2,0,1,3)$$

$$X_3 = (-1,1,0,0)$$

Los vectores X_1, X_2, X_3 son L.I.

En efecto

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_1(1,3,-1,2) + \lambda_2(2,0,1,3) + \lambda_3(-1,1,0,0) = 0 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Ejemplo 4. Sea $V = \mathbb{R}^2$. $K = \mathbb{R}$ y $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^2$

$$X_1 = (1,1)$$

$$X_2 = (1,0)$$

$$X_3 = (0,1)$$

Entonces X_1, X_2, X_3 son L.D.

En efecto

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_1(1,1)+\lambda_2(1,0)+\lambda_3(0,1) = 0 \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 + \lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 0\lambda_2 + \lambda_3 = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow$$

El sistema tiene solución diferente de la trivial, por ejemplo $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$

Por lo tanto X_1; X_2: X_3 son L.D.

Se tiene entonces que

$$-X_1 + X_2 + X_3 = 0 \Longrightarrow X_1 = X_2 + X_3$$

Luego decimos que X_1 es L.D. de X_2 y X_3. Y por otro lado X_1 es c.l. de los X_2 y X_3, es decir $X_1 \in \langle X_2, X_3\rangle$

Entonces concluimos que X_1 es L.D. de X_2 y X_3 ssi

$$X_1 \in \langle X_2, X_3\rangle$$

3.5. DEF. VECTOR DEPENDIENTE.

Sea V. un e.v. sobre K. Entonces un vector $X \in V$, se dice que es L.D. de los vectores $X_1, \ldots, X_n \in V$ si X se puede escribir de la forma:

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n \quad \text{con } \lambda_i \in K$$

3.6. PROP. Sea V. un e.v. sobre K, $v, v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$

Entonces v es L.D. de los $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ssi

$$v \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$$

Dem. se deja de ejercicio.

3.7. PROP. Sea V un e.v. sobre K y $S_1, S_2 \subset V$ tal que

$$S_1 = \{X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}\} \quad \text{es L.D.}$$

$$S_2 = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\} \quad \text{es L.I}$$

Entonces X_{n+1} es combinación lineal de los $X_1, X_2 \dots, X_n$

Dem. p.d. $\exists \lambda_i \in K$ tal que $X_{n+i} = \sum_{i=1}^{n} {}_i X_i$

S_1 es L.D. $\Longrightarrow \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n + \alpha_{n+1} X_{n+1} = 0$

con los α_i no todos nulos, $\alpha i \in K$

Pero $\alpha_{n+1} \neq 0$ ya que S_2 es L.I.

Luego $\alpha_{n+1} X_{n+1} = -\alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2 \dots \dots \alpha_n X_n$

$$X_{n+1} = \left(\frac{-\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right) X_1 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}\right) X_2 + \dots + \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) X_n$$

Haciendo $\lambda_i = \dfrac{-\alpha_i}{\alpha_{n+1}}$ $\forall_i$, se tiene

$$X_n + 1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$$

3.8. PROP. - Sea V un e.v. sobre K. - Entonces

1) $v_1, \dots v_2$ V son L.D. ssi $\exists_i$ tal que

$\langle v_1, \dots v_n \rangle = \langle v_1, \dots v_{i-1}, v_{i+1}, \dots v_n \rangle$

2) en general $S \subset V$ es L.D. ssi $\exists v \in S$ tal que

$\langle S \rangle = \langle S - \{v\} \rangle$

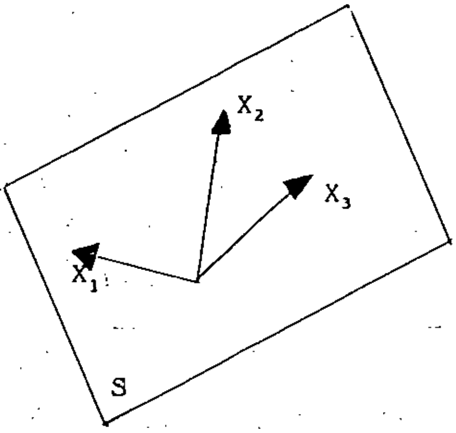
Dem. se deja de ejercicio

3.9. PROP. Sea V un e.v. sobre K y $S \subset V$. Entonces si $S = \{X_1, X_2, \dots X_n\}$ es L.D. se tiene que

$\forall_i$, X_i es c.l. de los restantes

Dem. se deja de ejercicio.

Ejemplo 5.- Sean X_1, X_2, X_3 vectores coplanares y no colineales



Entonces

$S = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ es un plano

Es claro que se tiene más vectores que los necesarios para generar el plano S, ya que cualquiera dos de ellos son suficientes. Por otro lado sabemos que al menos dos vectores son siempre necesario para generar un plano $\mathbb{R}^3$

Luego podemos concluir, es este caso, que podemos obtener un subconjunto mínimo del $\{X_1, X_2, X_3\}$ que genere a S prescindiendo de uno de los tres vectores.

3.10. PROBLEMA: ¿ Es posible descartar los vectores-sobrantes de cualquier conjunto finito $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ sin que cambie el subespacio generado por $\{X_1, \ldots . X_n\}$?

RESPUESTA: Si es posible (ver ejemplo 5). La idea básica es obvia, sencillamente prescindir de tantos vectores LD como sea posible.

En efecto, comenzamos con X_n

Si X_n es L.D. de $X_1, X_2 \ldots\ldots X_{n-1}$ entonces

$X_n = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots\ldots + \alpha_{n-1} X_{n-1}$; $\alpha_i \in K$

Por lo tanto si $X \in \langle X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n \rangle$, X se puede escribir de las formas:

a) $X = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots\ldots + \beta_n X_n$

b) $X = (\beta_1 + \alpha_1 \beta_n) X_1 + \ldots\ldots + (\beta_{n-1} + \alpha_{n-1} \beta_n) X_{n-1}$

De b) se tiene que $X \in \langle X_1, X_2, \ldots . X_{n-1} \rangle$

por lo tanto $\langle X_1, X_2 \ldots , X_{n-1} \rangle = \langle X_1, X_2, \ldots , X_n \rangle$

Y en este caso hemos prescindido del vector X_n en el conjunto $\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_n\}$ sin variar el subespacio generado.

Si por el contrario, X_n no es L.D. de $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ entonces lo conservamos.

Si repetimos este procedimiento con cada uno de los X_i uno tras otro, dejando a un lado X_i si es L.D. de los restantes vectores del conjunto (posiblemente ya modificado) y conservándolo en caso contrario, es claro que obtenemos un subconjunto $A \subset \{X_1, X_2, \ldots\ldots X_n\}$, que L.I. y que genera el mismo subespacio que $\{X_1, X_2, \ldots\ldots X_n\}$

es decir $\langle A \rangle = \langle X_1, X_2, \ldots X_n \rangle$

Luego hemos demostrado la siguiente Prop,

<u>3.11. PROP</u>. Sea V un e.v. sobre K y SCV finito Entonces existe ACS, tal que A es L.I. y

$$\langle S \rangle = \langle A \rangle$$

Dem. Hecho arriba

Ahora estamos en condiciones de definir base de un e.v

<u>3.12. DEF. BASE</u>

Sea V un e.v. sobre K. Entonces un conjunto ECV, se dice base de V si

1) E es L.I.
2) $V = \langle E \rangle$

<u>Ejemplo 6</u>. Sea $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, entonces

$E = \{(1,0), (0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y se llama la base canónica.

Ejemplo 7. $V = \{P(X) \ / \ \text{grado } P(X) \leq 2\}$

$K = R$

Entonces $E = \{1, X, X^2\}$ es base de V

1) Si $f \in V \Longrightarrow f(X) = a_o X^o + a_1 X^1 + a_2 X^2$

luego $\Longrightarrow f(X) = a_o \cdot 1 + a_1 X + a_2 X$

$f(X) \in \langle 1, X, X^2 \rangle \Longrightarrow V = \langle E \rangle$

2) Trivialmente $\{1, X, X^2\}$ es L.I.

3.13 PROP. Sea V un e.v. sobre K x $E \subset V$ tal que $E = \{X_1, X_2, \ldots\ldots X_n\}$. Entonces

E es base de V $\Longleftrightarrow \forall v \in V$, existe una única combinación lineal de los $X_i \in E$

Dem. ($\Longrightarrow$) supongamos E base de V

p.d. $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ en forma única

En efecto E base de V $\Longrightarrow V = \langle E \rangle$

$\Longrightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \quad , \quad v \in V$

Sea $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ otra c.l. de v

Luego $v - v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i - \alpha_i X_i$

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \alpha_i) X_i = 0$$

Entonces $\forall_i, \lambda_i - \alpha_i = 0$ por que E es L.I.

$\lambda_i - \alpha_i \Longrightarrow$ Existe una única c.l. para v.

($\Longleftarrow$) p.d. E es base V

1) Tenemos que

$\forall v \in V, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ en forma única

$v \in \langle x_1, x_2, \ldots . x_n \rangle$

luego $V = \langle x_1\ x_2, \ldots\ldots, x_n \rangle$

2) p.d. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es L.I.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n = 0$$

pero $0 = 0x_1 + 0x_2 + \ldots\ldots 0x_n$ en forma única

luego se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_n = 0$ y E es L.I.

Por lo tanto E es una base

Ejemplo 8. Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $K = \mathbb{R}$ y $E \subset V$ Tal que

$E = \{x_1, x_2, \ldots . x_n\}$ donde

$x_i = (1,1,1,\ldots\ldots 1,0,0,\ldots,0)$

Entonces E es base de $\mathbb{R}^n$

En efecto, sea $Y \in \mathbb{R}^n$; $Y = (Y_1, Y_2, \ldots . Y_n)$

debemos probar que existen únicos $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_I x_i$$

$$Y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n$$

$$Y = \lambda_1 (1,0,\ldots 0) + \lambda_2 (1,1,0,\ldots 0) + \ldots + \lambda_n (1,\ldots 1)$$

$$Y = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n, \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n, \ldots, \lambda_n)$$

Luego

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = Y_1 \\ \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = Y_2 \\ \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = Y_3 \end{array}\right\}$$
$$\vdots$$
$$\lambda_n = Y_n$$

Entonces $\lambda_1 = Y_1 - Y_2$; $\lambda_2 = Y_2 - Y_3$; .... ; $\lambda_n = Y_n$

$$\lambda_1 = Y_i - Y_{i+1} \Longrightarrow \exists!\ \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \quad \text{en forma única}$$

Luego E es base de $\mathbb{R}^n$

3.14. PROP. Sea V un e.v. sobre K. Entonces

1) Si $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$ son L.I. y $v \in V - \langle v_1 v_2, \ldots v_n \rangle$ $\Longrightarrow v, v_1, v_2, \ldots v_n$ on L.I.

2) En general, si $S \subset V$ es L.I. y $v \in V - \langle S \rangle \Longrightarrow$ $S \vee \{v\}$ es independientes

Dem.:

1) p.d. $v, v_1, v_2, \ldots v_n$ es L.I.

en efecto

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\text{Si } \neq 0 \Longrightarrow v = \left(-\frac{\alpha 1}{\alpha}\right) v_1 + \ldots X \left(\frac{-\alpha n}{\alpha}\right) v_n$$

$$= v \quad \langle v_1 v_2, \ldots, v_n \rangle \quad \Longrightarrow \Longleftarrow$$

Ya que $v \in V - \langle v_1, v_2, \ldots v_n \rangle$

luego se tiene que $\alpha = 0$ y por lo tanto

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

Entonces $\alpha_i = 0 \ \forall_i$ ya que $v_1, v_2, \ldots v_n$ son L.I.

Y se tiene que

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Longrightarrow \alpha = 0 \ \alpha_i = 0 \ \forall_i$$

$$\Longrightarrow v, v_1, v_2, \ldots, v_n \text{ son L.I.}$$

2) se deja de ejercicio.

3.15 PROP. Sea V un e.v. sobre $V \neq \{0\}$. Entonces V tiene una base

Dem : Sea $M = \{S / S \subseteq V \text{ y } S \text{ es L.I.}\}$

$V \neq \{0\} \Longrightarrow \exists\, v \in V,\ v \neq 0$

Entonces $\{v\} \in M \Longrightarrow M \neq \emptyset$

M está ordenado por inclusión y si S_i es una cadena en M, entonces:

$\cup S_i \in M \ ; \ i \in \mathbb{N}$

Luego por el lema de Zorn, M tiene un elemento maximal S
Entonces si S no es una base de V, se tiene

$\langle S \rangle \neq V$

Sea $v \in V - \langle S \rangle \Longrightarrow S \cup \{v\}$ es L.I. (Prop.3.14)

$\Longrightarrow S \cup \{v\} \in M \Longrightarrow \Longleftarrow$

Lo que es una contracción, puesto que S es elemento maximal

Luego S es una base de V.

3.16.- DEF. INDEPENDIENTE MAXIMAL

Sea V un e.v. sobre K y $S \subset V$. Entonces:

si $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \subset S$, el $\{x_1 \ldots x_p\}$

Se dice independiente maximal si:

1) Es un conjunto L.I.
2) $\{x_1, x_2, \ldots, x_p, w\}$ es L.D. $\forall\, w \in S$

3.17.- PROP.- Sea V un e.v. sobre K y $S \subset V$ tal que $\langle S \rangle = V$ y $\{x_1, x_2, \ldots x_p\} \subset S$ con $\{x_1, x_2, \ldots x_p\}$ independiente maximal. Entonces $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ es una base V.

Dem. Se deja de ejercicio

Ejemplo 9.

1) Sea $V = \mathbb{R}^3$ e.v. sobre K, entonces el conjunto finito $E = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$, es una base de V

2) Sea H un subcuerpo de los $\mathbb{C}$

$V = \{f/f : H \longrightarrow H;\ f \text{ función polinómica}\}$

y definamos

$f_r(X) = X^r$; $r = 0,1,2.....$

entonces el conjunto finito, $E = \{f_0, f_1, f_2, ...\}$ es una base de V.

3.18.- DEF. DIMENSION FINITA.

SEa V un e.v. sobre K. Entonces diremos que V es de dimensión finita si tiene una base finita. De lo contrario es infinita dimensional.

3.19.- PROP.- Sea V un e.v. sobre K y $S_1, S_2,$ C V tal que:

$S_1 = \{u_1, u_2.....u_p\}$, $V = \langle S_1 \rangle$

$S_2 = \{w_1, w_2,....w_p\}$, S_2 es L.I.

Entonces $\# S_2 \leq \# S_1$

Dem.: Se deja de ejercicio

3.20.- PROP.- Sea V. un e.v. sobre K y $S \leq V$ tal que $V = \langle S \rangle$

$v \in V$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ con $v_i \in S$

Entonces $S - \{v_j\} \cup \{v\}$ genera a V con $j \neq 0$

Dem.: se deja de ejercicio.

3.21. PROP. - (Lema cambio de Steinitz)

Sea V un e.v. sobre K, ScV tal que

$\langle S \rangle = V$ y $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es L.I. Entonces

$\forall i,\ 1 \leq i \leq n,\ \exists S_i \subset S$ tal que

$\#(S_i) = i$ y $\langle (S - S_i) \cup \{v_1, v_2, ..., v_i\} \rangle = V$

Dem.: se deja de ejercicio.

3.22.- PROP.- Sea V un e.v. sobre K y $S_1, S_2 \subset V$ tal que

$S_1 = \{X_1, X_2, \ldots\ldots X_m\}$, $V = \langle S_1 \rangle$

Entonces si S_2 es L.I. $\Longrightarrow$ S_2 es finito y $\# S_2 \leq m$

Dem.: Basta probar que cualquier subconjunto de V que tiene más de m elementos es L.D.

En efecto:

Sea $S_3 \subset V$ y $S_3 = \{Y_1, Y_2, \ldots . Y_n\}$

$\# S_3 = n > m$

Como:

$V = \langle S_1 \rangle \Longrightarrow \exists A_{ij} \in K$ tal que $\forall Y_j \in S_3$

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} X_i$$

p.d. S_3 es L.D.

Sean los n escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ tal que

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots . + \lambda_n Y_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ij} X_i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1} \lambda_j A_{ij} X_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \lambda_i \right) X_i$$

Como; $n > m \Longrightarrow \exists$ escalares no todos nulos $\lambda_1, \ldots . \lambda_n$ tal que $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \lambda_j = 0$ (3.1.)

Luego; $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots . . + \lambda_n Y_n = 0$ con λ_j no todos nulos, lo que implica S_3 es L.D.

NOTA: (Para 3.1), recordar $AX = 0$ con $A \in M_{mxn}$ con $m < n$, entonces existen soluciones distintas de la trivial.

3.23. PROP.- Sea V un e.v. sobre K y E, F bases de V Entonces si V es dimensión finita se tiene que: E y F son finitas y $\#E = \#F$

Dem.: V de dimensión finita $\Longrightarrow$ V tiene una base finita

Sea E tal base

$E = \{X_1, X_2, \dots, X_p\} \Longrightarrow V = \langle E \rangle$

y sea $F = \{X_1, X_2, \dots X_q\}$ otra base de V $\Longrightarrow$ F es L.I.

Luego por, Prop. 3.22, se tiene que F es finito y $\#F \leq \#E$, es decir $q \leq p$

Aplicando el mismo criterio, ahora para F base de V $\Longrightarrow V = \langle F \rangle$ y otra base E de V $\Longrightarrow$ E es L.I.

Tenemos $p \leq q$

Luego $q \leq p \wedge p \leq q \Longrightarrow p = q$ $(\#E = \#F)$

Esta Prop. nos permite definir la dimensión de un espacio vectorial.

3.24.- DEF. DIMENSION

Sea V un e.v. sobre K y E base de V, entonces se define la dimensión de V por:

$\dim V = \#E$

OBS. $\dim \{v\} = 1$; $v \neq 0$

$\dim \{0\} = 0$

3.25. PROP.- Sea V un e.v. sobre K con $\dim V = n$

Entonces:

1) Si SCV con $\#S = m$ y $n < m \Longrightarrow$ S es L.D.

2) Si $S_1 \subset V$ es L.I. y $\#S_1 = p \Longrightarrow p \leq n$

y si $p = n$ entonces S_1 es base de V

3) Si $S_2 \subset V$ con $\#S_2 = q$ y $q < n \Longrightarrow \langle S_2 \rangle \neq V$

4) Si $\langle S_3 \rangle = V$ con $\#S_3 = r \Longrightarrow r \geq n$

y si $r = n$ entonces S_3 es base V

5) Si $\{w_1, w_2, \ldots . w_t\}$ es un conjunto generado de V, entonces algún subconjunto de $\{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$ es una base V

Dem.: Se deja de ejercicio.

3.26.- PROP.- Sea V un e.v. sobre K, dim V = n

Entonces : Si $W \leq V$ y $S \subset W$ es L.I.

$\Longrightarrow$ S es finito y parte de una base finita de W

Dem.: Sea S_0 un conjunto L.I. y $S_0 \subset W$

Si S es L.I. y $S \subset W$ tal que $S_0 \subset S$ entonces

$S \subset V$ y $\#S \leq n$

Extendemos S_0 a una base de W

Si $\langle S_0 \rangle = W \Longrightarrow S_0$ es una base W y está demostrado

Si $\langle S_0 \rangle \neq W \Longrightarrow S_1 = S_0 \cup \{u_1\}$ es L.I.

donde $u_1 \in W$, $u \notin \langle S_0 \rangle$

Si $\langle S_1 \rangle = W \Longrightarrow S_1$ es una base W y se tiene la demostración

Si $\langle S_1 \rangle \neq W \Longrightarrow S_2 = S_1 \cup \{u_2\}$ es L.I.

donde $u_2 \in W$, $u_2 \notin \langle S_1 \rangle$

Si $\langle S_2 \rangle = W \Longrightarrow S_2$ es base de W y se tiene la demostración

Si $\langle S_2 \rangle \neq W$ aplicamos nuevamente el proceso anterior hasta que en no más de, n, etapas se obtiene un conjunto:

$S_n = S_0 \cup \{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$

que es una base de W

3.27.- PROP.- Sea V un e.v. sobre K y $W \leq V$ propio con dim V = n. Entonces

dim W < dim V

Dem.: dim V = n $\Longrightarrow$ V tiene una base finita

Entonces por las proposiciones anteriores existe F base de W tal que $w_1 \in F$, con $w_1 \neq 0$ y $w_1 \in W$, además F es finito y

$\#F \leq n$

Luego dim $W \leq n$

Pero $W \leq V$ propio $\Longrightarrow \exists\, w_2 \in V \wedge w_2 \notin W$

Entonces: SI E es base W, se tiene que

$E \cup \{w_2\}$ es L.I.

Por lo tanto: $\#E < n$

y dim W < dim V

OBS.

1) SI $W \leq V$ entonces dim $W \leq$ Dim V

2) dim W = dim V $\Longleftrightarrow$ W = V

3.28.- PROP.- Si V es un e.v. sobre K y $S \subset V$ es L.I.

$\Longrightarrow$ S es parte de una base de V

Dem.: se deja de ejercicio.

Ejemplo 10. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $K = \mathbb{R}$

Si $W \leq V \Longrightarrow$ dim W = 0, 1, 2, 3

dim W = 1 $\Longrightarrow$ $W = \langle v\rangle$	; $v \neq 0$	rectas
dim W = 2 $\Longrightarrow$ $W = \langle v, w\rangle$	; $v \neq w$	planos
dim W = 3 $\Longrightarrow$ $W = \mathbb{R}^3$		espacio
dim W = 0 $\Longrightarrow$ $W = \{0\}$		orígen

Ejemplo 11. Sea $V = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}$; $W \leq V$

$W = \langle (1,-2,5,-3), (2,3,1,-4), (3,8,-3,-5) \rangle$

1) Hallar dim W

2) Encontrar base de W

3) Extender la base W a una base $\mathbb{R}^4$

Sol. Del conjunto generador de W debemos encontrar un conjunto minimal generador.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & -7 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego los tres vectores dados son L.D. y uno de ellos se puede descartar.

Luego: $E = \{(1,-1,5,-3),\ (2,3,1,-4)\}$

es tal que E es L.I. y $\langle E \rangle = W \implies E$ es base de $W \implies \dim W=2$
$E \subset V$ es L.I. $\implies$ E es parte de una base de $\mathbb{R}^4$ entonces debemos agregar dos vectores a E para formar la base, tales que estos no pertenezcan a $\langle E \rangle$

$E' = E \cup \{(0,0,1,0),\ (0,0,01)\}$

E' es L.I. y $\#E' = 4 \implies E'$ es base de $\mathbb{R}^4$

3.29.- PROP.- Sea V un e.v. sobre K y dim V = n y $W_1, W_2 \leq V$

Entonces: $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y:

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$$

Dem.: Si dim V = n finita y $W_1, W_2 \leq V$

$\implies W_1, W_2$ es dimensión finita

$\implies W_1 + W_2 \leq V$ de dimensión finita

Por otro lado :

$W_1 + W_2 \leq V \implies W_1 \cap W_2 \leq V$, de dimensión finita

$\implies \exists$ base finita $\{X_1, X_2, \dots X_p\}$ de $W_1 \cap W_2$ y es parte de una base de W_1 y W_2

Luego: $F = \{X_1, \dots, X_p, Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ base de W_1

$G = \{X_1, \ldots X_p, Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_q\}$ base de W_2

Por proposición anterior se tiene:

$W_1 + W_2 = \langle \{X_1, \ldots X_p, Y_1, \ldots Y_m, Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_q\} \rangle$

Además el conjunto generador es L.I. (3.2.)

Por lo tanto $\{X_1, \ldots\ldots, X_p, Y_1, \ldots\ldots, Y_m, Z_1, \ldots Z_q\}$

es base de $W_1 + W_2$ y se tiene

$$\begin{aligned} \dim W_1 + \dim W_2 &= (p + n) + (p + q) \\ &= p + (p + n + q) \\ &= \dim (W_1 \cap W_2) + \dim (W_1 + W_2) \end{aligned}$$

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$$

Nota: En (3.2), la demostración de la L.I. se deja de ejercicio.

Ejemplo 12: $V = \mathbb{R}^3$ y $K = \mathbb{R}$ y W_1, W_2 tales que

$$W_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ X = (a,b,o)\}$$

$$W_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \ / \ X = (o,o,c)\}$$

entonces $W_1, W_2 \leq V$ y

$$V = W_1 \oplus X_2$$

$$\begin{aligned} \dim (W_1+W_2) &= \dim w_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2) \\ &= 2 + 1 - 0 \end{aligned}$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$

3.30. PROP.- Sea V un e.v. sobre K y $W_1, W_2 \leq V$ con V, W_1, W_2 de dimensiones finitas. Entonces:

$$\dim (W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

Dem.: se deja de ejercicio.

Ejemplo 13.- Sea $V = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}$, $W \subset \mathbb{R}^4$

$$W = \left\{ (X, Y, Z, W) \;/\; \begin{array}{r} 3X + Y + Z + W = 0 \\ X - Y - Z - W = 0 \\ X + 3Y + 3Z + 3W = 0 \end{array} \right\}$$

Entonces $W \leq V$

$\dim W = 2$

$W = \{(X, Y, Z, W) \;/\; X = 0 \;,\; Y + Z + W = 0\}$

$W = \{(0, Y, Z, -Y, -Z) \;/\; Y, Z \in \mathbb{R}\}$

Sea $w_1 \in W \;;\; w_1 \neq 0 \;;\; w_1 = (0,1,0,-1) \Longrightarrow \{w_1\}$ es L.I.

Pero $W - \langle\{w_1\}\rangle \neq \emptyset \Longrightarrow \{w_1\}$ no es base de W

Extendamos $\{w_1\}$ a una base de W

Sea $w_2 \in W - \langle\{w_1\}\rangle \;;\; w_2 \in W$

$E = \{w_1\} \cup \{w_2\}$ con $w_2 = (0,0,1,-1)$

$= \{(0,1,0,-1), \; (0,0,1,-1)\}$ es L.I.

y $W = \langle E \rangle$

Luego E es base de W

Veamos ahora una aplicación inmediata del concepto de base, nos referimos al concepto de sistema de coordenadas.

Una de las características útiles de una base E en un e.v. de dimensión n es que permite esencialmente introducir coordenadas en V.

3.31. DEF. BASE ORDENADA.

Sea V un e.v. sobre K, entonces una base ordenada de V es una sucesión de vectores de V, $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ que son L.I. y generan V.

OBS.: Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una base ordenada de V $\Longrightarrow \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es base de V

Sabemos que si $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V se tiene que $\forall v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \quad \text{en forma única}$$

Es decir $\exists!\ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n)$ n-upla ordenada de escalares de K, llamada coordenada de v con respecto a la base E, donde la i-ésima coordenada de v es λ_i

3.32. DEF. VECTOR COORDENADO.

Sea V un e.v. sobre K, dim V = n y $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_2\}$ base ordenada de V. Entonces si

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

se define el vector coordenado de v en la base E por:

$$[v]_E = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

con la i-ésima coordenada igual a λ_i

Además los vectores $v_1, v_2, \ldots v_n$ formar en sistema de coordenadas para V y

$W_i = \langle v_i \rangle \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$ se llaman ejes coordenados

Ejemplo 14 sea $V = \mathbb{R}^2$; $K = \mathbb{R}$ y sean las bases ordenadas

$E = \{(1,0), (0,1)\}$ y

$F = \{(1,0), (1,1)\}$

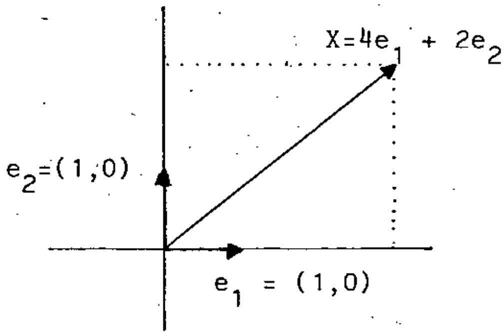
Entonces: en $\mathbb{R}^2$, E define el sistema de ejes coordenados rectangular.

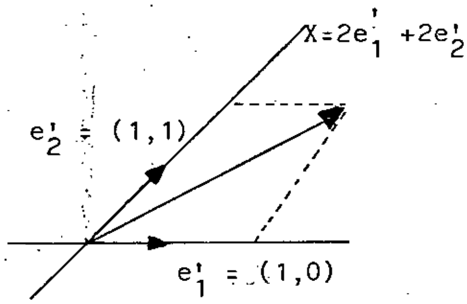
$W_1 = \langle (1,0) \rangle$ eje de abcisas

$W_2 = \langle (0,1) \rangle$ eje de ordenadas

Y F define un sistema de ejes coordenado oblicuo, cuyos ejes coordenados son:

$W_1 = \langle(1,0)\rangle$ y $W_2 = \langle(1,1)\rangle$





SI $X = (4,2) \Longrightarrow [X]_E = \begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ y $[X]_F = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

OBS.:

1) Toda n-upla $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ es una n-upla coordenada para algún vector $v \in V$,
a saber $\sum \lambda_i v_i$; $v_i \in E$ base.
Luego cada base ordenada determina una correspondencia biunívoca
$V \longrightarrow K^n$
$v \longmapsto (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$
tal que conserva la + y ·

2) ¿Si se cambia la base de V, cambian las coordenadas de un vector?

3) ¿Qué relación existe entre las diferentes coordenadas de $v \in V$, para diferentes bases?

Las respuestas las veremos más adelante.

Ejemplo 10.: En $\mathbb{R}^2$ definamos las bases ordenadas

E = la base usual o canónica
$F = [(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)]$

(rotación en Θ de la base canónica)

Si $[v]_E = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ entonces

$$[v]_F = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \operatorname{sen}\Theta \\ -\operatorname{sen}\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1\cos\Theta + X_2\operatorname{sen}\Theta \\ -X_1\operatorname{sen}\Theta + X_2\cos\Theta \end{bmatrix}$$

notar que: $[v]_F = P\,[v]_E$

Si $\Theta = \pi/4$ y $v = (1,1)$

$$[(1,1)]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} X_1 = 1 \\ X_2 = 1 \end{array}$$

$$[(1,1)]_F = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l} X'_1 = 2 \\ X'_2 = 0 \end{array}$$

3.33.- EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Hacer las demostraciones pendientes

2.- Si $v_1 = (1,1,0,m)$

$v_2 = (3,-1,n,-1) \quad \in \mathbb{R}^4$

$v_3 = (-3,5,m,-4)$

Dar condiciones necesarias y suficientes (C.N.S.) para que v_1, v_2, v_3 sean L.D. y encuentre la dependencia.

3.- Sea $W = \{(X,Y,Y,-X) \,/\, X,Y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$
Pruebe que $W \leq \mathbb{R}^4$ y $\dim W = 2$

4.- Sean $X,Y,Z, \in \mathbb{R}^3$. Dar C.N.S. para que X,Y,Z sean L.I.

5.- Sean $S_1 = \{X_1, X_2, X_3\}$ y $S_2 = \{X_1+X_2, X_2+X_3, X_1+X_3\}$
Demuestre que si S_1 es L.I. $\Longrightarrow$ S_2 es L.I.

6.- Dar C.N.S. para que (a,b), (c,d) sean L.I.

7.- Si $V = \mathbb{R}^4$, $K = \mathbb{R}$ ¿Es posible formar una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga los vectores (4,-3,0,0) y (0,1,0,1)?

8.- Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores:

$v_1 = (4,-5,7)$; $v_2 = (3,-3,4)$; $v_3 = (1,1,-2)$; $v_4 = (2,-1,1)$

Hallar un sistema mínimo de generadores del subespacio que los contiene.

¿El subespacio referido anteriormente es igual a:

$\langle (1,-2,3), (3,0,-1) \rangle$

9.- Encuentre una base E de W si

$W = \langle (1,2,2,1), (0,2,0,1), (-2,0,-4,3) \rangle$

y luego elemento $[v]_E$: $v \in W$

¿$F = \{(1,0,2,0), (0,2,0,1), (0,0,0,3)\}$ es base de W?

10.- Encuentre dim W si $W = \{X \in \mathbb{R}^3 \;/\; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}$

11.- $V = \{P[X] \;/\; \text{Grad } P \leq 2\}$ y $E = \{1, X-1, (X-1)^2\}$ base de V

Encuentre $[v]_E$ si $v = 2X^2 - 5X + 6$

4.- TRANSFORMACIONES LINEALES

Si fijamos nuestra atención en los e.v. reales, nos damos cuenta que el estudio hecho puede ser descrito de la mejor manera como una modesta generalización de algunas de las ideas implícitas en la geometría analítica. Aunque términos tales como L.D. y L.I., subespacio, base y otros pueden que nos hayan sido familiares, lo cierto es que añaden poco al conocimiento del los e.v. enseñados en la geometría elemental. Todo esto cambia, sin embargo, tan pronto como estas ideas se usan para estudiar funciones definidas sobre e.v.

Las funciones más sencillas, pero también las más importantes, que surgen en el estudio de los e.v. se conocen como transformaciones lineales.

4.1. DEF. TRANSFORMACION LINEAL (t.l.)

Sean V.W e.v. sobre K. Entonces la función T.

$$T : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto T(v)$$

se dice que es una transformación lineal si:

1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \qquad \forall\, v_1, v_2 \in V$

2) $T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) \qquad \forall\, \alpha \in K,\ v_1 \in V$

OBS.:

1) Una t.l. T es una función que envía sumas en sumas y productos en productos sobre e.v.
Es decir t.l. es compatible con las operaciones definidas en los e.v.

2) En la definición de t.l. se pueden cambiar las condiciones 1) y 2) por:

$T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$

3) De la definición de t.l. se concluye
$T(0) = 0$

4) Una t.l. conserva las c.l., es decir

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$$

4.2.- PROP. Sean V,W e.v. sobre K. Entonces T

$T : V \longrightarrow W$

T es una t.l. $\Longleftrightarrow T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$
$\forall \alpha, \beta \in K \ ; \ v_1, v_2 \in V$

Dem: se deja de ejercicio.

4.3.- PROP. Sean V,W e.v. sobre K y $T:V \longrightarrow W$ una t.l. Entonces

1) $T(0) = 0$

2) $T(\lambda_1 V_2 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_n V_n) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \ldots + \lambda_n T(v_n)$

Dem: Se deja de ejercicio

Ejemplo 1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(X_1, X_2) \longmapsto (X_1, -X_2)$

y $V = W = \mathbb{R}^2$ y $K = \mathbb{R}$

T es una t.l. (Reflexión respecto del eje X_1)

En efecto:

1) $T(X+Y) \overset{?}{=} T(X) + T(Y) \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2$

$(X+Y) = T[(X_1, X_2) + (Y_1, Y_2)]$
$= T(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2)$

$$= (X_1+Y_1, - X_2 - Y_2)$$
$$= (X_1 - X_2) + (Y_1 - Y_2)$$
$$= T(X) + T(Y)$$

2) $T(\alpha X) \stackrel{?}{=} \alpha T(X) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathbb{R}^2$

$$T(\alpha(X_1, X_2)) = T(\alpha X_1, \alpha X_2)$$
$$= (\alpha X_1, -\alpha X_2)$$
$$= \alpha(X_1, - X_2)$$
$$= \alpha T(X_1, X_2)$$

Ejemplo 2. $V = W = \mathbb{R}^2$ y $K = \mathbb{R}$

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(X_1, X_2) \longmapsto (X_1 + X_2, X_2)$$

T es una t.l. (Rotación en $\theta = \pi/4$)

Ejemplo 3.- Sea $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$

$$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$X \longmapsto (3X, 7X)$$

T es una t.l.

Ejemplo 4.- $T : V \longrightarrow W$

$$X \longmapsto T(X) = 0 \qquad \forall X \in V$$

T es una t.l., llamado transformación cero, y se indica por T_0 o 0.

$$T : V \longrightarrow V$$
$$X \longmapsto T(X) = X$$

T es una t.l., llamada de identidad y se denota por I o T_I

Ejemplo 5.- $V = \mathcal{C}[a,b] \quad : \quad K = \mathbb{R}$

$$T : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow \mathcal{C}[a,b]$$

$$f \longmapsto T(f) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$a \leq x \leq b$$

T es una t.l.

Ejemplo 6. $T : \mathcal{C}^1[a,b] \longrightarrow \mathcal{C}^1[a,b]$

$$f \longmapsto T(f) = f'$$

T es una t.l. $(T(f) = D(f) = f')$

Ejemplo 7.- $T: M_{mxm} \longrightarrow M_{mxm}$

$$X \longmapsto T(X) = AXB$$

T es una t.l., donde $A \in M_{nxn}$ y $B \in M_{mxn}$

4.4.- DEF. SUMA DE LOS t.l. Y PRODUCTOS POR ESCALAR

Sean V,W e.v. sobre K y T_1, T_2 t.l. tales que:

$T_1, T_2 : V \longrightarrow W$

Entonces se definen las sumas y productos siguientes:

1) $(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \qquad ; \; v \in V$

2) $(\lambda T_1)(v) = \lambda T_1(v) \qquad ; \; \lambda \in K$

4.5.- DEF. CONJUNTO DE LAS t.l.

Sean V,W e.v. sobre K, entonces se define:

$\text{Hom}(V,W) = \{T / T: V \longrightarrow W \; ; \; T \text{ es t.l}\}$

4.6.- PROP. Si T_1, T_2 (Hom(V,W)) entonces

1) $T_1 + T_2 \in \text{Hom}(V,W)$

2) $\lambda T_1 \in \text{Hom}(V,W)$; $\lambda \in K$

Dem:

1) p.d. $(T_1 + T_2)(\alpha v_1 + v_2) = (T_1 + T_2)(\alpha v_1) + (T_1 + T_2)(v_2)$

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(\alpha v_1 + v_2) &= T_1(\alpha v_1 + v_2) + T_2(\alpha v_1 + v_2)\\ &= \alpha T_1(v_1) + T_1(v_2) + \alpha T_2(v_1) + T_2(v_2)\\ &= \alpha(T_1 + T_2)(v_1) + (T_1 + T_2)(v_2)\end{aligned}$$

2) Se deja de ejercicio.

Ejemplo 8.- Sean $T_1 = D$, $T_2 = D^2 \in \text{Hom}(\mathcal{C}^2[a,b], \mathcal{C}[a,b])$

Entonces: $D^2 + D : \mathcal{C}^2[a,b] \longrightarrow \mathcal{C}[a,b]$

$f \longmapsto f'' + f'$

Luego: $(D^2 + D)(y) = D^2 y + Dy$

4.7 PROP.- Si definimos las operaciones + y $\cdot$, dado en Def. 4.4., en Hom(V,W). Entonces se tiene que Hom(V,W) es un e.v. sobre K

Dem: se deja de ejercicio.

4.8. PROP. Si $A = \{f / f: V \longrightarrow W;\ V, W \neq \emptyset \text{ y } f \text{ función}\}$

Entonces $\text{Hom}(V,W) \leq A$

Dem.: Se deja de ejercicio.

4.9.- PROP.- Sean V,W e.v. sobre K, de dimensiones finitas, y $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ vectores cualesquiera de W

Entonces $\exists!$ t.l. T tal que

$$T : V \longrightarrow W$$

$$T(v_i) = w_i \ ; \quad i=1,\ldots,n$$

Dem.: Para demostrar que existe una t.l. T tal que $T(v_i) = w_i$

Dado $v \in V \implies [v]_E = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$

$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ en forma única

Para este vector v definamos:

$$T(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots\ldots + \lambda_n w_n \qquad (4.2)$$

Entonces T es una correspondencia bien definida tal que

$$T : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto T(v)$$

y $T(v_j) = w_j$ para cada $j= 1,\ldots,n$ (por (4.2))

Veamos que T es una t.l.

$$X = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots + \alpha_n v_n$$

$$Y = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots\ldots + \beta_n v_n$$

$$\lambda X + y = (\lambda\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\lambda v_2 + \beta_2) v_2 + \ldots + (\lambda\alpha_n + \beta_n) v_n$$

$$T(\lambda X+Y) = (\lambda\alpha_1 + \beta_1) w_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (\lambda\alpha_n + \beta_n) w_n$$

$$\lambda T(X) + T(Y) = \lambda(\alpha_1 w_1 + \ldots\ldots + \alpha_n w_n) + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$$

Luego $T(\lambda X + Y) = \lambda T(X) + T(Y)$

Sea U una t.l. tal que

$U : v \longrightarrow W$ con $U(v_j) = w_j$; $j=1,\ldots,n$

Entonces para $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ se tiene

$$U(v) = U\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; U(v_i) \; = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$$

Luego U ės exactamente la misma correspondencia T, lo que implica que la t.l. T con $T(v_j) = w_j$ es única

<u>4.10. PROP</u>.- Sean V,W e.v. sobre K, tales que

dim V = n y dim W = m Entonces

dim Hom(V,W) = n m

Dem.: Sean:

$E = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ base ordenada de V

$F = \{w_1, w_2, \ldots\ldots, w_m\}$ base ordenada de W

Definamos una t.l. para cada par de enteros (p.q.) con $1 \leq p \leq m$ y $1 \leq q \leq n$ por

$$S^{p,q} : V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto S^{p,q}(v)$$

$$S^{p,q}(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq q \\ w_p & \text{si } i = q \end{cases}$$
$$= \delta_{iq} w_p$$

Existe una única t.l. de V en W que satisface estas condiciones. Se tiene que las mn transformaciones lineales $S^{p,q}$ forman una base de Hom(V,W)

Sea: $T : V \longrightarrow W$ una t.l.

y para cada J, $1 \leq j \leq n$,

$$\left[T(v_j)\right]_F = \begin{bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{bmatrix}$$

Es decir $T(v_j) = \sum_{p=1}^{m} A_{pj} w_p$

p.d. $$T = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq} S^{p,q} \qquad (4.3)$$

Sea U la t.l. del segundo miembro de 4.3. Entonces para cada j

$$U(v_j) = \sum_p \sum_q A_{pq} S^{p,q}(v_j)$$

$$= \sum_p \sum_q A_{pq} \delta_{jp} w_p$$

$$= \sum_{p=1}^{m} A_{pj} w_p$$

$$= T(v_j)$$

Luego $U = T$

Pero de (4.3) se tiene que los $S^{p,q}$ generan Hom(V,W) entonces debemos demostrar que son L.I. Pero esto queda claro con lo expuesto anteriormente; en efecto, si la transformación:

$$U = \sum_p \sum_q A_{pq} S^{p,q}$$

Es la transformación nula, entonces

$U(v_j) = 0$ para cada j

Con lo que

$$\sum_{p=1}^{m} A_{pj} w_j = 0$$

Pero el $\{w_j\}$ son L.I. lo que implica que

$A_{pj} = 0 \quad \forall$ p y j

Luego los $S^{p,q}$ son L.I.

Por lo tanto base de Hom(V,W)

Luego dim Hom(V,W) = n m

<u>Ejemplo</u>: Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$ y

$\{(1,2), (3,4)\}$ base de $\mathbb{R}^2$

Por la prop. 4.9 existe una unica t.l. T

$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

Si $v_1 = (1,2)$; $v_2 = (3,4)$ y vectores de W

$w_1 = (3,2,1)$; $w_2 = (6.5.4)$, se tiene

$T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$

Por lo tanto podemos encontrar T(X), donde $X \in V$, encontrando los escalares λ_1 y λ_2 tales que

$X = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

luego $T(X) = T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$

$T(X) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2)$

Si $X = (1,0) \Longrightarrow (1,0) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$\Longrightarrow \lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 1$

Entonces $T(1,0) = -2\, T(v_1) + 1\, T(v_2)$

$= -2(3,2,1) + 1(6,5,4) = (0,1,2)$

<u>Ejemplo</u> : Si $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$

entonces dim Hom $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) = 4 \cdot 3$

$= 12$

4.11.- DEF. COMPOSICION DE t.l.

Sean V,W,U e.v. sobre K y

$T_1 : V \longrightarrow W$

$T_2 : W \longrightarrow U$

entonces se define la compuesta de T_1 yT_2 por

$(T_2\ T_1)(v) = T_2\ (T_1(v))$; $v \in V$

4.12.- PROP.- Si T_1 Hom(V,W) y T_2 Hom(W,U)

entonces $T_2\ T_1$ Hom(V,U)

Dem.: $(T_2T_1)(\lambda X+Y) \stackrel{?}{=} \lambda(T_2T_1)(X) + (T_2T_1)(Y)$

$$
\begin{aligned}
(T_2T_1)(\ \ X+Y) &= T_2(T_1(\lambda X+Y) \\
&= T_2(\lambda T_1(X) + T_1(Y)) \\
&= \lambda T_2(T_1(X) + T_2(T_1(Y)) \\
&= \lambda(T_2T_1)(X) + (T_2T_1)(Y)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10.-

Sean $V = W = U = \mathbb{R}^2$; $K = \mathbb{R}$

$E = \{e_1, e_2\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$

T_1 = Rotación en $\pi/2$ (↺) sentido positivo

T_2 = Reflexión sobre eje X

Entonces

$(T_1T_2)(e_1) = T_1(T_2(e_1) = T_1(e_1) = e_2$

$(T_2T_1)(e_1) = T_2(T_1(e_1))= T_2(e_2) = -e_2$

luego

$T_2T_1 \neq T_1\ T_2$

no es conmutativo.

4.13. PROP.- Supongamos que están bien definido los productos (composiciones) de t.l., se tiene.

1) $T_1T_2 \neq T_2T_1$

2) $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$

3) $(T_1 + T_2)T_3 = T_1T_3 + T_2T_3$

$T_3(T_1 + T_2) = T_3T_1 + T_3T_2$

4) $(\alpha T_1)T_2 = T_1(\alpha T_2) = \alpha(T_1T_2)$; $\lambda \in K$

5) $T_1 I_V = T_1$

6) $I_W T_1 = T_1$

Dem 2) sean

$$V_1 \xrightarrow{T_3} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_1} V_4$$

$$\begin{aligned} T_1(T_2T_3)(v) &= T_1((T_2T_3)(v)) \\ &= T_1(T_2(T_3(v))) \\ &= (T_1T_2)(T_3(v)) \\ &= ((T_1T_2)T_3)(v) \end{aligned}$$

$\therefore$ $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$

El resto de las demostraciones se dejan de ejercicios.

4.14. DEF. OPERADOOR LINEAL (o.l.)

Sea V un e.v. sobre K y si $T : V \longrightarrow V$ es una t.l. Entonces T se llama operador lineal en V.

OBS. Se ve claramente que si T_1, T_2 son dos operadores lineales en V, entonces está definida la composición T_1T_2 y T_2T_1 que no necesariamente son iguales.

4.15. DEF. POTENCIAS DE UN o.l

Sea V un e.v. sobre K y T un o.l. en V. entonces se definen las potencias de T por:

$$T^0 = I$$

$$T^1 = T$$

$$T^3 = T^2\ T$$

en general $T^n = T^{n-1}\ T \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$

4.16- PROP.- Sea V un e.v. sobre K y T un o.l. en V. Entonces

1) $T^mT^n = T^{m+n}$

2) $(T^m)^n = T^{mn}$

4.17.- PROP. - Sea V un e.v. sobre K y T_1, T_2, T_3 operadores lineales sobre V. Entonces:

1) $T_1T_2 \neq T_2T_1$

2) $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$

3) $IT_1 = T_1I = T_1$

4) $T_1(T_2 + T_3) = T_1T_2 + T_1T_3$

$(T_2 + T_3)T_1 = T_2T_1 + T_3T_1$

5) $\lambda(T_1T_2) = (\lambda T_1)T_2 = T_1(\lambda T_2)$

Dem.: 4) p.d. $T_1(T_2 + T_3) = T_1T_2 + T_1T_3$

$$\begin{aligned}\left[T_1(T_2 + T_3)\right](v) &= T_1\left[(T_2 + T_3)(v)\right]\\ &= T_1\left[T_2(v) + T_3(v)\right]\\ &= T_1\big(T_2(v)\big) + T_1\big(T_3(v)\big)\\ &= T_1T_2(v) + T_1T_3(v)\\ &= \left[T_1T_2 + T_1T_3\right](v)\end{aligned}$$

Luego $T\,(T_2 + T_3) = T_1T_2 + T_1T_3$

El resto de las demostraciones se deja de ejercicio.

Ejemplo 11.-

Sea $V = \{\text{polinomios reales}\}$; $K = \mathbb{R}$

T_1 ; T_2 : $V \longrightarrow V$ definidas por

$T_1 = D \Longrightarrow T_1(f) = D(f) = f'$

$T_2(f) = X\ f$

Dos operadores lineales sobre V

Entonces

$T_1T_2 \neq T_2T_1$

OBS. Si T es un o.l. sobre V, podemos usar las potencias de T y las operaciones + y $\cdot$ para formar polinomios en T. Así si se tiene un polinomio en p(X) real $P(X) = a_0 + a_1 + \ldots + a_nX^n$

Definimos p(T) como la t.l. en V obtenida sustituyendo X por T en p(X)

Estos polinomios obedecen todas las reglas familiares del algebra de polinomios, con la sola excepción de que los productos puedan a veces hacerse nulos sin que sea nulo ninguno de los factores.

4.18.- DEF. POLINOMIO DE o.l.

Sea V un e.v. sobre K y T un o.l. sobre V. Entonces definimos el polinomio del operador T por:

$p(T) = a_0 T + a_1 T + \ldots\ldots + a_n T^n$

con $a_i \in \mathbb{R}$; $i = 1, \ldots\ldots, n$

y si $X \in V$ se tiene

$\left[p(T)\right](X) = a_0 X + a_1 T(X) + \ldots\ldots + a_n T^n(X)$

Ejemplo 12.- $V = \mathbb{P}_n$

$T = D : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$

$f \longmapsto D(f)$

Luego:

$D^n(f) = 0$ y $D \neq 0$

Ejemplo 13.- $V = \mathcal{C}^n [a,b]$, $K = \mathbb{R}$

$D : \mathcal{C}^n [a,b] \longrightarrow \mathcal{C}^n [a,b]$

y definamos el polinomio

$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 D + a_o$ con $a_i \in K$

llamados operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Ejemplo 14.

SEa un tal polinomio diferencial lineal de orden 2.

$p(D) = D^2 + D - 2$

si y es una función perteneciente a $\mathcal{C}^2$

se tiene

$\left[p(D)\right](Y) = (D^2 + D - 2)\, y$

$$= D^2y + Dy - 2y$$

y se tiene una ecuación diferencial lineal de orden 2 con coefiente constante si

$$D^2y + Dy - 2y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dX^2} + \frac{dy}{dX} - 2y = 0$$

Podemos aplicar el algebra al polinomio diferencial

$D^2 + D - 2$ y obtenemos

$$D^2 + D - 2 = (D-1)(D+2)$$

y por lo tanto

$$(D^2 + D - 2)y = (D-1)(D+2)\ y$$

y formamos la ecuación diferencial

$(D^2 + D - 2)y = 0$ y si desea resolverla se tiene

$$(D^2 + D - 2)y = (D-1)(D+2)y = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (D-1)y = 0 \ \wedge \ (D+2)y = 0$$

$$\Longrightarrow \quad Y_g = C_1e^X + C_2e^{-2X}$$

<u>Ejemplo 15.-</u>

Sean T_1, T_2 o.l. sobre $\mathcal{C}^n\ [a,b]$

definidas por

$$T_1 = XD + 1$$

$$T_2 = D - X$$

Luego

$$T_1(y) = X\ Dy + y$$

$$T_2(y) = Dy - Xy$$

entonces:

$$(T_1T_2)y = \left[XD^2 + (1 - X^2)D - 2X\right] y$$
$$(T_2T_1)y = \left[XD^2 + (2 - X^2) D - X\right] y$$

por lo tanto:

$$T_1T_2 \neq T_2T_1$$

Veremos ahora los conceptos de nucleo e imagen, que tiene gran importancia en el estudio del comportamiento de las t.l.

4.19.- DEF. NUCLEO E IMAGEN

Sean V,W e.v. sobre K y $T \in (V,W)$. Entonces se define:

1) El nucleo T por

$$\text{Ker } T = \{v/v \in V \text{ tal que } T(v) = 0\}$$

2) La imagen de T por:

$$\text{Im } T = \{w/w \in W; \exists\, v \in V \text{ tal que } T(v) = w\}$$

OBS.: Es claro que Ker $T \subset V$ e Im $T \subset W$

4.20.- PROP. SEan V,M, e.v. sobre K y $T \in \text{Hom}(V,W)$

Entonces:

1) $\text{Ker}T \leq V$

2) $\text{Im}T \leq W$

Dem. 1) $\text{Ker}T \neq \emptyset$

$$0 \in V \Longrightarrow T(0) = 0 \Longrightarrow 0 \in \text{Ker}T$$

$$v_1, v_2 \in \text{Ker}T,\ \alpha \in K \Longrightarrow \alpha v_1 + v_2 \in \text{Ker}T$$

$$T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$$
$$= \alpha 0 + 0$$
$$= 0$$

$\therefore$ $\operatorname{Ker} T \leq V$

2) a.- $\operatorname{Im} T \neq \emptyset$

$\exists\ 0 \in V$ tal que $T(0) = 0 \Longrightarrow 0 \in \operatorname{Im} T$

b.- $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} T,\ \alpha \in K \Longrightarrow \alpha w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} T$

Como: $w_1 \in \operatorname{Im} T \Longrightarrow \exists\ v_1 \in V$ tal que $T(v_1) = w_1$

$w_2 \in \operatorname{Im} T \Longrightarrow \exists\ v_2 \in V$ tal que $T(v_2) = w_2$

Entonces

$$T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$$
$$= \alpha w_1 + w_2$$

$\therefore$ $\alpha w_1 + w_2 \in \operatorname{Im} T$

Por lo tanto $\operatorname{Im} T \leq W$

4.21.- DEF. NULIDAD Y RANGO.

Sean V,W e.v. sobre K y $T \in \operatorname{Hom}(V,W)$ Entonces se define:

a) La nulidad de T por:

$\eta(T) = \dim \operatorname{Ker} T$

b) El rango de T por;

$\rho(T) = \dim \operatorname{Im} T$

4.22.- PROP.- Sean V,M e.v. sobre K y $T \in \operatorname{Hom}(V,W)$ y $\dim V = n$; $\eta(T) = q$; $\rho(T) = R$

Entonces:

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T$$

$$n = \eta(T) + \rho(T)$$

Dem.: $\dim V = n \Longrightarrow E = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V

$\eta(T) = q \Longrightarrow F = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$ bade ordenada de Ker T

F base $\Longrightarrow$ F es L.I.

Luego F se puede extender a una base de V

SEa E esta base

Luego $F \subset E$ y $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_q, v_{q+1}, \ldots, v_n\}$

p.d. $\{T(v_{q+1}), \ldots T(v_n)\}$ es base de Im(T)

En efecto:

Evidentemente sabemos que:

$$\operatorname{Im} T = \langle T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_q), T(v_{q+1}), \ldots, T(v_n) \rangle$$

pero $T\,v_i = 0$; $\forall_i$ $i = 1, \ldots, q$

luego $\operatorname{Im} T = \langle T(v_{q+1}), \ldots, T(v_n) \rangle$

Los vectores $T(v_{q+1}), \ldots T(v_n)$ son L.I.

En efecto:

Sean $\lambda_i \in K$ tales que

$$\sum_{i=q+1}^{n} \lambda_i T(v_i) = 0 \Longrightarrow T\left(\sum_{i=q+1}^{n} \lambda_i v_i\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=q+1}^{n} \lambda_i v_i \in \operatorname{Ker} T$$

Luego si $V = \sum_{i=q+1}^{n} \lambda_i v_i$ y F base de Ker T

se tiene $v = \sum_{j=1}^{q} \lambda'_j v_j$

entonces $\sum_{j=1}^{q} \lambda'_j v_j - \sum_{i=q+1}^{n} \lambda_i v_i = 0,$

Como $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_q, \ldots, v_n\}$ es base de V

se debe tener que $\lambda'_1 = \lambda'_2 =, \ldots = \lambda'_q = \lambda_{q+1} = \ldots = \lambda_n = 0$

en particular $\lambda_i = 0 \quad \forall_i, i = q+1, \ldots, n$

luego $\{T(v_{q+1}), \ldots\ldots, T(v_n)\}$ es base de Im T

pero dim Im T $= \rho(T) = r$

luego $r = n - q$

$n = q + r$

$\dim V = \eta(T) + \rho(T)$

Ejemplo 16

Sea $T : V \longrightarrow V$; dim V = n

si $T = I \Longrightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\} \wedge \eta(T) = 0$

$\operatorname{Im} T = V \wedge \rho(T) = n$

Ejemplo 17.-

Sea dim V = n

$T : V \longrightarrow W$

Si $T = T_0 \Longrightarrow \operatorname{Ker} T = V \wedge \eta(T) = n$

$\operatorname{Im} T = \{0\} \wedge \rho(T) = 0$

Ejemplo 18.-

Sea $T : \mathcal{C}^2[-\infty, \infty] \longrightarrow \mathcal{C}^2[-\infty, \infty]$

Si $T = D^2 - I$

Entonces, $\operatorname{Ker} T = \{Y/Y \in \mathcal{C}^2[-\infty, \infty] \wedge (D^2 - I)\, y = 0\}$

Es decir encontrar el Ker T es concontrar las soluciones de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dX^2} - y = 0$$

$$\text{Ker } T = \{Y_G / \ Y_G = C_1e^X + C_2e^{-X} \ ; \ C_1, C_2 \in K\}$$

Ejemplo 19.-

SEan $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, T Hom $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

tales que:

$$T(X,Y,Z) = (X - Z, Y)$$

a) ¿Es T una t.l. ?

b) Encuentre una base del Ker(T)

c) Encuentre Im(T)

sol. a) se deja de ejercicio

b) $\text{Ker } T = \{v/v \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T\,v = 0\}$

$= \{(X,Y,Z)/ \ T(X,Y,Z) = (X-Z,Y) = 0\}$

luego tenemos

$$(X-Z,Y) = 0 \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} X-Z = 0 \\ Y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} X = Z \\ Y = 0 \end{array} \qquad \forall\, Z \in R$$

$$\Longrightarrow \text{Ker } T = \langle (1,0,1) \rangle$$

$$\Longrightarrow \text{Ker } T = \{v/v \in \mathbb{R}^3 \text{ y } v = \lambda(1,0,1); \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{y } E = \{(1,0,1)\} \text{ base de Ker } T$$

$$\Longrightarrow \eta(T) = 1$$

c) sabemos que:

$$\dim V = \eta(T) + \rho(T)$$
$$3 = 1 + \rho(T)$$
$$\rho(T) = 2$$

Luego podemos encontrar un conjunto generador minimal de Im (T), que debe tener 2 vectores.

Enefecto:

Sea $F = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^3$

entonces por Prop. anterior

$$\left.\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,0) \\ T(0,1,0) &= (0,1) \\ T(0,0,1) &= (-1,0) \end{aligned}\right\}$$

Debemos encontrar el conjunto generador de entre $\{(1,0), (0,1), (-1,0)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \exists \text{ 2 vectores L.I.}$$

Luego $\{(1,0), (0,1)\}$ es una base de Im T

$$\text{Im } T = \langle (1,0), (0,1) \rangle \Longrightarrow \text{Im } T = \mathbb{R}^2$$

Ahora examinaremos aquellas t.l. $T \in \text{Hom}(V,W)$, para las cuales se cumple una o las dos de las siguientes igualdades:

$$\text{Ker } (T) = 0 \quad ; \quad \text{Im } (T) = V_2$$

4.23.- DEF. t.l. INYECTIVA Y SOBREYECTIVA.

Sea $T \in \text{Hom}(V,W)$ Entonces

1) T es inyectiva o 1-1 ssi $T(v_1) = T(v_2) \Longrightarrow v_1 = v_2$

2) T es sobreyectiva ssi $\forall\ w \in W, \exists\ v \in V$ tal que $T(v) = w$
es decir si $\mathrm{Im}\ T = W$

<u>4.24.- PROP.</u>-- $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ es 1-1 ssi $\mathrm{Ker}\ T = \{0\}$

Dem.: $(\Longrightarrow)$ supongamos que T es 1-1

p.d. $\mathrm{Ker}\ T = \{0\}$

Supongamos que $\mathrm{Ker}\ T \neq \{0\}$

$\Longrightarrow \exists v \neq 0,\ v \in \mathrm{Ker}\ T$ tal que $T(v) = 0$

pero $T(0) = 0$

luego $T(v) = T(0) \Longrightarrow V = 0 \Longrightarrow\Longleftarrow$

Por lo tanto $\mathrm{ker}\ T = \{0\}$

$(\Longleftarrow)$ supongamos $\mathrm{Ker}\ T = \{0\}$

p.d. T es 1-1

$v_1 v_2 \in \mathrm{Ker}\ T \Longrightarrow T(v_1) = T(v_2)$

$\Longrightarrow T(v_1) - T(v_2) = 0$

$\Longrightarrow T(v_1 - v_2) = 0$

$\Longrightarrow V_1 = V_2$

$\Longrightarrow$ T es inyectiva

OBS. ¿Para qué t.l., T, existe T^{-1}?

Sabemos que si una función $f : A \longrightarrow B$

1-1 y sobre ssi es biyectiva

Además f es invertible si $\exists! f^{-1}$ tal que

$f^{-1} : B \longrightarrow A$ y

$f\ f^{-1} = I_A \quad \wedge \quad f\ f^{-1} = I_B$

También se tiene que si f es biyectiva, entonces f es invertible.

4.25.- DEF. t.l. INVERTIBLE.

Sean V,W e.v. sobre K y $T \in Hom(V,W)$. Entonces T se dice invertible si $\exists ! \; T^{-1} : W \longrightarrow V$

Tal que $T^{-1}T = I_V$ y $T\,T^{-1} = I_W$

4.26.- PROP.- Sean V,W e.v. sobre K y $T \in Hom(V,W)$
Entonces si T es invertible se tiene que

$$T^{-1} \in Hom(W,V)$$

Dem.: p.d. $T^{-1}(\lambda w_1 + w_2) = \lambda T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$

con $w_1, w_2 \in W$; $\lambda \in K$

sabemos que

T invertible $\Longrightarrow \exists ! \; T^{-1}$

Sean $\left.\begin{array}{l} v_1 = T^{-1}(w_1) \\ v_2 = T^{-1}(w_2) \end{array}\right. \Longrightarrow \exists ! \; Tv_i = w_i$

T Lineal $\Longrightarrow T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda T(v_1) + T(v_2)$

$$= \lambda w_1 + w_2$$

$\Longrightarrow \lambda w_1 + w_2$ es el único vector de V tal que T lo lleva en $\lambda w_1 + w_2$

Luego $T^{-1}(\lambda w_1 + w_2) = \lambda v_1 + v_2$

$$= \lambda T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$$

Por lo tanto T^{-1} es t.l.

OBS.: Si $T_1 : V \longrightarrow W$ t.l. invertible

$T_2 : W \longrightarrow U$ t.l. invertible

Entonces por lo anteriormente visto se tiene

T_2T_1 es invertible y $(T_2T_1)^{-1} = T_1^{-1}\ T_2^{-1}$

Solamente necesitamos probar que la inversa derecha e izquierda de $T_2\ T_1$ es $(T_2\ T_1)^{-1}$

4.27.- DEF. ISOMORFISMO.

Sea $T \in \text{Hom}(V,W)$. Entonces si T es 1 -1 y sobre se dice que T es un isomorfismo. Además V y W son isomorfos y se denota por:

$V \cong W$

4.28.- DEF. t.l. SINGULAR.

Sea $T \in \text{Hom}\ (V,W)$. Entonces T se dice no singular si $\text{Ker}\ (T) = \{0\}$

4.29.- PROP.- Sea $T \in \text{Hom}(V,W)$. Entonces

T es 1-1 $\Longleftrightarrow$ T es no singular

Dem.: Se deja de ejercicio.

OBS.: Las t.l. no singulares preservan la independencia lineal.

4.30.- PROP.- Sean V,W e.v. sobre $T \in \text{Hom}(V,W)$. Entonces T es no singular $\Longleftrightarrow$ T aplica cada subconjunto L.I. de V sobre subconjunto L.I. de W.

Dem.: ($\Longrightarrow$) supongamos que T es no singular

p.d. Si $S = \{v_1, \ldots\ldots, v_n\} \subset V$, L.I. $\Longrightarrow$ $\{Tv_1, \ldots\ldots, Tv_n\}$ es L.I. en W

En efecto

$$\lambda_1 T(v_1) + {}_2T(v_2) + \ldots\ldots + \lambda_n T(v_n) = 0$$

$\Longrightarrow \quad T(\lambda_1 v_1 + \ldots\ldots + \lambda_n v_n) = 0$

$\Longrightarrow \quad \lambda_1 v_1 + \ldots\ldots + \lambda_n v_n = 0$

$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots = \lambda_n = 0$ por ser S L.I.

$\Longrightarrow \quad T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)$ son L.I. en W

($\Longleftarrow$) p.d. T no es singular

$v \in V,\ v \neq 0 \Longrightarrow \{v\}$ es L.I. en V

$\Longrightarrow \{Tv\}$ es L.I. en W

$\Longrightarrow Tv \neq 0$

$\Longrightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\}$

$\Longrightarrow$ T es no singular

Ejemplo 20:

Sean $V = W = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$ y $T \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Tal que $T(X_1, X_2) = (X_1 + X_2, X_1)$

Entonces T no es singular

En efecto:

1) p.d. $T(v_1) = T(v_2) \Longrightarrow v_1 = v_2$ (T es 1 -1)

$T(v_1) = T(v_2) \Longrightarrow (X_1 + X_2, X_1) = (Y_1 + Y_2, Y_1)$

$\Longrightarrow X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2$

$X_1 = Y_1$

$\Longrightarrow X_1 = Y_1 \wedge X_2 = Y_2$

$\Longrightarrow (X_1, X_2) = (Y_1, Y_2)$

$\Longrightarrow V_1 = v_2$

$\Longrightarrow$ T es 1-1

$\Longrightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\}$

$\Longrightarrow$ T es no singular

Ejemplo 21:

Para t.l. del ejemplo 20 encontramos

a) Que $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, es decir T es 1-1

Sea $(X_1, X_2) \in \operatorname{Ker} T \Longrightarrow T(X_1, X_2) = 0$

$\Longrightarrow (X_1 + X_2, X_1) = 0$

$\Longrightarrow X_1 + X_2 = 0$

$X_1 = 0$

$\Longrightarrow X_1 = X_2 = 0$

$\Longrightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\}$

$\Longrightarrow$ T es 1-1

b) T es sobre

$\forall (Y_1, Y_2) \in \mathbb{R}^2, \exists (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$T(X_1, X_2) = (Y_1, Y_2)$

se tiene

$T(X_1, X_2) = (X_1 + X_2, X_1)$

luego $\left.\begin{array}{r} X_1 + X_2 = Y_1 \\ X_1 = Y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1 = Y_2 \wedge X_2 = Y_1 - Y_2$

Entonces T es sobre

c) $\operatorname{Ker} T = \{0\} \Longrightarrow \eta(T) = 0$

$\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \rho(T) = 2$

$\dim V = \eta(T) + \rho(T) = 2$

d) Se tiene T es 1-1 sobre $\Longrightarrow$ T es isomorfismo

$\Longrightarrow$ T es invertible

$\Longrightarrow$ T es no singular

y se tiene que

$$T^{-1}(Y_1, Y_2) = (X_1, X_2)$$
$$= (Y_2, Y_1 - Y_2)$$

4.31.- DEF. GRUPO LINEAL GENERAL.

Sea V un e.v. sobre K. Entonces se define el grupo lineal general de V por:

$GL(V) = \{T/T$ es un o.l. sobre V no singular$\}$

4.32.- PROP. G.L.(V) es grupo

Dem.: Se deja de ejercicio

4.33.- PROP. Sea V,W e.v. sobre K con

$\dim V = \dim W = n$ y $T \in Hom(V,W)$

Entonces:

T es isomorfismo $\Longleftrightarrow$ Ker T $= \{0\}$

Dem: $(\Longrightarrow)$ T isomorfismo $\Longrightarrow$ T es 1 -1

$\Longrightarrow$ Ker T $= \{0\}$

$(\Longleftarrow)$ p.d. T es 1 -1 y sobre

a) Ker T $= \{0\} \Longrightarrow$ T es 1 -1 (Por prop. anterior)

b) p.d. T es sobre

Sea $w \in W$ y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V

entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es base de W

En efecto:

$\lambda_1 T(v_1) + \ldots\ldots + \lambda_n T(v_n) = 0$

$\Longrightarrow T(\lambda_1 v_1, + \dots + \lambda_n v_n) = 0$

$\Longrightarrow \lambda_1 v_1 + \dots\dots + \lambda_n v_n = 0$

$\Longrightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall_i = 1, 2, \dots, n$

$\Longrightarrow \{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es L.I.

Por otro lado $\# \{Tv_1, \dots, Tv_n\} = n = \dim W$

Luego $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es base de W

Si $w \in W \Longrightarrow w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n$

$= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n)$

$= T(\alpha v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$

$\Longrightarrow \exists v \in V, \; v = \sum_{i=1}^{n} \alpha v_1$ tal que $T(v) = w$

Por lo tanto

$\operatorname{Im} T = W \Longrightarrow T$ es sobre

4.34. PROP. Sean V,W e,v, sobre K y $\dim V = \dim W = n$ y $T \in \operatorname{Hom}(V,W)$.

Entonces son equivalentes:

1) T es invertible
2) T es ~~no~~ singular
3) T es sobre

Dem.: Se deja de ejercicio.

4.35.- PROP. Sean V,W e.v. sobre K y $\dim V = \dim W = n$ y $T \in \operatorname{Hom}(V,W)$

Entonces son equivalentes:

a) T es invertible

b) T es no singular

c) T es sobre

d) $\{v_1,\dots,v_n\}$ base de V $\Longrightarrow$ $\{T(v_1),\dots T(v_n)\}$ base de W

e) $\exists$ base $\{v_1,\dots.v_n\}$ de V tal que $\{Tv_1,\dots Tv_n\}$ es base de W

Dem.: se deja de ejercicio.

Presentamos ahora una de las aplicaciones de las t.l. Gran parte del estudio de las t.l., se dedica a diseñar métodos para la resolución de ecuaciones de la forma:

$$AX = Y$$

donde 'y' se conoce, 'X' es incógnita y A una t.l.

4.36. DEF. ECUACIONES DE OPERADORES

Sean V,W e.v. sobre el cuerpo K y $T \in \text{Hom}(V,W)$ entonces la ecuación

$$TX = Y$$

Se llama ecuación con operadores

OBS. En general, la técnica para resolver una ecuación con operadores depende de T, la t.l. y de los e.v. V,W

4.37. DEF. VECTOR SOLUCION

Sea T Hom(V,W). Entonces el vector $X_0 \in V$ es una solución de $TX = Y$ si $TX_0 = Y$

y $S = \{X_0 / X_0$ es solución de $TX = Y\}$ se llama conjunto solución de la ecuación

OBS.:

1) Se se tiene la ecuación homogénea $TX = 0$, entonces el conjunto solución $S \leq V$

2) Una de las propiedades más importantes de las ecuaciones con operadores es:

El resolver $TX = Y$, se reduce a resolver $TX = 0$

Efectivamente si X_p es una solución particular de $TX = Y$,

X_h es una solución cualquiera de $TX = 0$

entonces

$X_p + X_h$ es una solución de $TX = Y$

ya que:

$$\begin{aligned} T(X_p + X_h) &= T(X_p) + T(X_h) \\ &= Y + 0 \\ &= Y \end{aligned}$$

Además toda solución X_0 de $TX = Y$ se puede escribir como $X_p + X_h$ para X_h adecuado, ya que:

$$\begin{aligned} T(X_0 - X_p) &= T(X_0) - T(X_p) \\ &= Y - Y \\ &= 0 \end{aligned}$$

entonces $X_0 - X_p = X_h$ es solución de $TX = 0$

y por lo tanto $X_0 = X_p + X_h$

Luego hemos probado la siguiente proposición:

<u>4.38. PROP.</u> Sea T Hom(V,W)

Si X_p es una solución particular de $TX = Y$

entonces su conjunto solución es:

$S = \{ X_0 / X_p + X_h \}$

donde X_h es la solución de $TX = 0$

Dem.: Hecha arriba

Ejemplo 21 :

Sea $T = D^2 - I$ tal que

$T : \mathcal{C}^2(-\infty, \infty) \longrightarrow \mathcal{C}^2(-\infty, \infty)$

Entonces la ecuación con operadores

$TY = 1 \quad ; \quad Y \in \mathcal{C}^2(-\infty, \infty)$, tiene la forma

$$D^2 Y = Y = 1 \qquad (4.4)$$

$Y_p = -1$ es trivialmente una solución de (4.4)

y su ecuación homogéneo asociada es

$$D^2Y - Y = 0$$

y se tiene

$$Y_h = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

luego

$$Y_G = -1 + C_1e^x + C_2e^{-x}$$

OBS.: Uno de los principales problemas en el estudio de las ecuaciones con operadores es el determinar condiciones bajo las cuales la ecuación $TX = Y$ tendrá soluciones. Este es el llamdo **problema de existencia** de las ecuaciones y las proposiciones que establecen estas condiciones se llaman teoremas de existencia.

De igual, o incluso mayor importancia es el problema de determinar cuando $TX = Y$ admite una única solución. Este problema se conoce con el nombre **unicidad**.

4.39 PROP. Si T Hom(V,W). Entonces la ecuación $TX = Y$ tiene una única solución ssi

TX = 0 tenga sólo la solución trivial, es decir

ssi Ker T = 0

Dem.: Pendiente o se deja de ejercicio.

INDICE

5. REPRESENTACION MATRICIAL DE UNA TRANSFORMACION LINEAL

Ahora veremos que toda t. ℓ. se puede representar por una matriz.

Primeramente veamos otros detalles acerca de los vectores coordenados.

5.1. DEF. VECTOR COORDENADO

Sean V e.v. sobre K, $E=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V. Entonces,

$$\forall x \in V \Longrightarrow x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n ; \quad \lambda_i \in K$$

y el vector coordenado de x respecto de la base E es:

$$[x]_E = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Si x, y $\in$ V $\Longrightarrow$ $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n v_n \quad ; \quad \lambda_i \in K$

$$y = \lambda'_1 x_1 + \ldots + \lambda'_n v_n \quad ; \quad \lambda'_i \in K$$

entonces

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda'_i) v_i$$

$$\alpha x = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \lambda_i) v_i$$

Por lo tanto si definimos T por

$$T : V \longrightarrow K^n$$

$$x \longrightarrow [x]_E$$

Se tiene:

(1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$; es decir T es t.ℓ.

(2) $T(x) = T(y) \Longrightarrow x = y$: es decir T es 1-1

(3) $\forall [X]_E \in K^n, \exists\, x \in V$ tal que $Tx = [X]_E$; luego T es sobre.

Hemos probado, entonces, la siguiente Prop.

5.2. PROP. Sean V un e.v. sobre K y $E = \{v, \ldots, v_n\}$ base ordenada de V. Entonces la aplicación;

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow K^n \\ X &\longrightarrow [X]_E \end{aligned}$$

es un isomorfismo

y, $V \cong K^n$

Dem. Hecha.

PROBLEMA:

¿Qué le sucede a las coordenadas de un vector x cuando se cambia de una base a otra?

¿Cómo están relacionados los vectores coordenados de x en las diferentes bases?

Sean V un e.v. sobre K, $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $F = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ bases ordenadas de V. Entonces tenemos

$$\forall\, w_j \in F \Longrightarrow w_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\, v_i \quad ; \text{ con únicos } P_{ij} \in K$$

$$1 \leq j \leq n$$

y para $\forall x \in V \Longrightarrow x = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n \quad ; \lambda_i \in K$

$$\Longrightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j$$

$$\Longrightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i \right)$$

$$\Longrightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (p_{ij} \lambda'_j) v_i$$

$$\Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \lambda_j \right) v_i \qquad (5.1)$$

Pero $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad ; \quad \lambda_i \in K$ (5.2)

Por la emicidad de la escritura de x, se tiene

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \lambda'_j \quad ; \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

es decir se tiene la siguiente relación

$$[x]_E = P [x]_F$$

donde $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(k)$ invertible, llamado matriz cambio de base (de E a F).

$$P^{-1} [x]_E = [x]_F$$

Luego, hemos probado la siguiente Prop.

5.3. PROP. Sean V e.v. sobre K y E, F bases ordenadas de V. Entonces existe una única matriz invertible de nxn, con elementos en K, tal que $\forall x \in V$ se tiene

(1) $[x]_E = P [x]_F$

(2) $[x]_F = P^{-1}[x]_E$

donde las columnas P están dadas por

$$P_j = [w_j]_E \quad \text{con } w_j \in F$$

Dem. Hecha.

5.4. PROP. Sean V un e.v. sobre K, $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ invertible y E base ordenada de V. Entonces existe una base ordenada F de V, única, tal que $\forall\, x \in V$

(1) $[x]_E = P\; X_F$

(2) $[x]_F = P^{-1}[x]_E$

Dem. Se deja de ejercicio.

Ejemplo 1: Sea $V = \mathbb{R}^2$; $K = \mathbb{R}$ y $+, \circ$ las usuales

$E = \{(1,0),\ (0,1)\}$

$F = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$

si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$[x]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1)$

$= \cos\theta(1,0) + \operatorname{sen}\theta(0,1)$

$(-\operatorname{sen}\theta\ ,\ \cos\theta) = \lambda_3(1,0) + \lambda_4(0,1)$

$= -\operatorname{sen}\theta\ (1,0) + \cos\theta(0,1)$

$$\therefore \quad P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Entonces $\left[X\right]_F = P^{-1}\left[X\right]_E$

$$\left[X\right]_F = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[X\right]_F = \begin{bmatrix} x_1 \cos\theta + x_2 \operatorname{sen}\theta \\ -x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta \end{bmatrix}$$

En particular si $x = (1,1)$ y $\theta = \pi/2$

$$\left[X\right]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \left[X\right]_F = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: En $\mathbb{R}^2$ sean las bases

$$E = \{(1,0),\ (0,1)\} \quad y \quad F = \{(1,0),\ (1,1)\}$$

y $x = (2,4)$

Entonces;

$$(1,0) = 1\,(1,0) + 0(0,1)$$

$$(1,1) = 1\,(1,0) + 1(0,1)$$

Luego tenemos;

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad [X]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad y \quad [X]_F = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Veamos ahora el caso para una $t.\ell.$

5.5. <u>PROP.</u> Sea V, W un e.v. sobre K, $\dim V = n$ y una base de V, $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Entonces si $T \in Hom(V,W)$

(1) T está determinada unívocamente por

$$T(v_1), \ldots\ldots, T(v_n)$$

(2) Si $\mu_1, \ldots, \mu_n$ son vectores cualesquiera de W. Entonces existe $T_1 \in Hom(V,W)$ tal que,

$$T_1(v_i) = \mu_i \qquad \forall_i$$

Dem. (1) Si $v \; V \Longrightarrow \exists! \; \lambda_i \in K$ tal que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Luego $\quad T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, T(v_i) \qquad \text{es conocido}$$

(2) Hecho en el punto 4

Consideremos V,W e.v. sobre K, $\dim V = m$, $\dim W = m$ y sean $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $F = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ base de V y W

Luego $\forall v \in V \Longrightarrow [v]_E = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$\forall w \in W \Longrightarrow [w]_F = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

¿Es posible encontrar una relación que ligue las componentes de v y las de su imagen bajo una t. ℓ. T.

En efecto sea $T \in Hom(V,W)$

entonces $\forall\, v \in V$ tenemos

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \qquad (5\text{-}3)$$

$$T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \dots + \lambda_n T(v_n) \qquad (5\text{-}4)$$

Como $E = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$; $F = \{w_1, \dots, w_m\} \in W$

se tiene que cada $T(v_i)$; $i = 1, \dots, n$, tiene una única representación en la base F.

Luego existen m escalares $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}$ tal que

$$T(v_i) = a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \dots + a_{mi} w_m \qquad \forall_i = 1, \dots, n$$

entonces para (5-4) tenemos

$$T(v) = \lambda_1(a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \dots + a_{mi} w_m) + \lambda_2(a_{12} w_1 + \dots + a_{m2} w_m)$$

$$+ \dots + \lambda_n(a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m)$$

$$T(v) = (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n}) w_1 + (\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots) w_2$$

$$+ \dots + \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \dots + \lambda_n a_{mn}) W_m$$

Si hacemos:

$$\alpha_j = \lambda_1 a_{j1} + \lambda_2 a_{j2} + \dots + \lambda_n a_{jn} \quad ; \quad j = 1, \dots, m \qquad (5\text{-}6)$$

$$\therefore \quad T(v) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_m w_m$$

por lo tanto el vector coordenado de Tv es

$$T(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

Igualando con (5-6)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_n a_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{n2} + \cdots + \lambda_n a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a21 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$$

Luego podemos concluir:

(1) Sabemos que:

$$T(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \quad y \quad [v]_E = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Luego se tiene que $A = a_{ij}$ $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$ es lo que relaciona las componentes de v y Tv.

(2) Cada columna r de A_{ij} está formada por las componentes de $T(v_r)$ respecto de la base F.

$$\begin{bmatrix} T(v_r) \end{bmatrix}_F$$

(3) La matriz A_{ij} se llama matriz asociada a la t.ℓ. T relativa a las bases E y F y se denota por:

$$[T]_E^F$$

(4) Ya que $T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i$ (5-7)

con $v_j \in E$, $w_i \in F$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, m$

entonces T está determinada por los m n escalares a_{ij} mediante (5-7) con $A = a_{ij}$ la matriz, de m x n, de T respecto las bases E y F

(5) Si A es una matriz de m x n sobre K, entonces

$$T(v) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) w_i$$

define una t.ℓ. T. de V en W, tal que A es su matriz respecto de las bases E y F.

Luego hemos probado las siguientes Prop. y podemos dar las definiciones.

5.6. <u>DEF. MATRIZ DE UNA T.ℓ.</u>

Sea $T \in Hom(V,W)$ y $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V,
$F = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base de W tales que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$$

Entonces,

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

un arreglo de m filas y n columnas es la matriz de T respecto de E y F.

Diremos que (a_{ij}) es una matriz de tamaño mxn y a_{ij} es el elemento de posición (i,j).

5.7. DEF. CONJUNTO DE MATRICES

Se define

$$\mathcal{M}_{mxn}(k) = \{ A / A = (a_{ij}) \text{ de mxn sobre k} \}$$

5.8. PROP. Sean V, W e.v. sobre K ; dim V = n , dim W = m y $E = \{ v_1, \dots, v_n \}$ base de V, $F = \{ w_1, \dots, w_m \}$ base de W y $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$

Entonces,

(1) Si T está determinada unívocamente por los nxm escalares $a_{ij} \in K$ donde

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad ; \quad j = 1, \dots, n$$

(2) Si $a_{ij} \in K$ con $1 \leq i \leq m$; $1 \leq j < n$ entonces existe $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ tal que

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Dem. Hecha.

5.9. PROP. Sean V, W e.v. sobre K, $\dim V = n$, $\dim W = M$ y E, F bases ordenadas de V y W respectivamente, Entonces,

(1) Para cada $T \in \text{Hom}(V,W)$ existe una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(k)$ tal que

$$[T\,v]_F = A\,[v]_E \qquad \forall\, v \in V$$

(2) La aplicación f tal que

$$f: \text{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(k)$$

$$T \longmapsto A = [T]_E^F$$

es una biyección.

Dem. Hecha.

Si $T_1, T_2 \in \text{Hom}(V,W)$ y E, F base ordenada de V y W y sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tales que

$$A = [T_1]_E^F \qquad y \qquad B = [T_2]_E^F$$

entonces

$\alpha A + B$ es la matriz de $\alpha T_1 + T_2$ respecto de las bases E y F. En efecto.

se sabe que $A_j = [T\,v_j]_F$; $j = 1, \ldots, n$; $v_j \in E$

$$\therefore \quad \alpha A_j + B_j = \alpha [T_1 v_j]_F + [T_2\, v_j]_F$$

$$= [\alpha T_1\, v_j + T_2\, v_j]_F$$

$$= [(\alpha T_1 + T_2)\, v_j]_F$$

Luego hemos probado la siguiente Prop.

5.10 PROP. Sean V,W e.v. de $\dim V = n$, $\dim W = m$ y E,F base de V y W entonces la aplicación f

$$f: \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}$$

$$T \longmapsto A = [T]_E^F$$

es un isomorfismo y

$$\mathrm{Hom}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(k)$$

Dem. Hecha.

Ejemplo 3: Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \longmapsto (x,y)$$

$E = \{(1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

$F = \{(2,1),\ (1,2)\}$ base de $\mathbb{R}^2$

(1) Encontrar $[T]_E^F$

En efecto,

$$T(1,0,1) = (1,0) = \frac{2}{3}(2,1) - \frac{1}{3}(1,2)$$

$$T(1,1,0) = (1,1) = \frac{1}{3}(2,1) + \frac{1}{3}(1,2)$$

$$T(1,1,1) = (1,1) = \frac{1}{3}(2,1) + \frac{1}{3}(1,2)$$

Luego $[T]_E^F = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 4: Sean $K = \mathbb{R}$, $V = W = P[X]$

con $\operatorname{grad} P \leq 3$ y $E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

con $v_i = x^{i-1}$; $i = 1, \ldots, 4$

Encuentre $[T]_E^E$ si

$$T = D : \quad V \longrightarrow V$$
$$P \longmapsto P'$$

En efecto;

$$v_1 = 1 \Longrightarrow D(1) = 0 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4$$

$$v_2 = X \Longrightarrow D(X) = 1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4$$

$$v_3 = X^2 \Longrightarrow D(x^2) = 2x = 0v_1 + 2v_2 + 0v_3 + 0v_4$$

$$v_4 = X^3 \Longrightarrow D(x^3) = 3x^2 = 0v_1 + 0v_2 + 3v_3 + 0v_4$$

Luego,

$$[D]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Ejemplo 5:</u> Sean $V = W = \mathbb{R}^2$

$$E = \{(1,1),(1,0)\} ; \quad F = \{(1,0),(0,1)\} \text{ bases de } \mathbb{R}^2$$

y $[T]_E^F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Encuentre:

(1) $T(1,1)$?

En efecto: $(1,1) \in V$

$$(1,1) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$
$$= 1\,(1,1) + 0(1,0)$$

luego $[(1,1)]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sabemos que:

$$\left[T_v\right]_F = A\left[v\right]_E \Longrightarrow \left[T\right]_E^F \left[v\right]_E = \left[T_v\right]_F$$

entonces tenemos $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \left[T(1,1)\right]_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} T(1,1) &= a\,w_1 + b\,w_2 \\ &= 1(1,0) + 2(0,1) \\ &= (1,2) \end{aligned}$$

(2) Ker T?

Sabemos que $\operatorname{Ker} T = \{ v \in V / T_v = 0 \}$

luego $T_v = 0 = 0\,w_1 + 0\,w_2$

$$v = a\,v_1 + b\,v_2$$

entonces $\left[v\right]_E = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$; $\left[T_v\right]_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

y $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore a = b = 0 \Longrightarrow v = 0\,v_1 + v_2 = (0,0)$$

$$\operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}$$

Luego $\eta(T) = 0 \quad \wedge \quad (T) = \dim V - \eta(T) = 2$

Además T es 1-1

Volviendo al hecho que $\mathrm{Hom}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}$

Podemos definir una estructura de espacio vectorial sobre ${}_{m\times n}(K)$ usando $[T]_E^F$. Entonces si $A = [T]_E^F = (a_{ij})$ y

$B = [T]_E^F = (b_{ij})$ y $\alpha \in K$

definimos,

$$A + B = T + [S]_E^F \quad y \quad \alpha A = [\alpha T]_E^F$$

y tenemos que $\mathcal{M}_{m\times n}$ es un e.v. sobre K

$$\begin{aligned} \text{Ahora } (T+S)(v_j) &= T(v_j) + S(v_j) \\ &= \sum_i a_{ij} w_i + \sum_i b_{ij} w_i \\ &= \sum_i (a_{ij} + b_{ij})\, w_i \end{aligned}$$

Luego si $(A+B) = (c_{ij})$ entonces $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Análogamente si $\alpha A = (d_{ij})$ entonces $d_{ij} = d\, a_{ij}$.

Por lo tanto tenemos.

5.11. <u>PROP.</u>

(1) $\mathcal{M}_{m\times n}(k)$ es un e.v. sobre k con las operaciones + y $\cdot$ definidas anteriormente y $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}) = mn$

(2) Si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ entonces $\exists\, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que $C = A + B$ con,

$$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \forall_{i}, j$$

(3) Si $\alpha \in K$ y $A \in \mathcal{M}_{mxn}$, $A = (a_{ij})$. Entonces, $\exists\, D \in \mathcal{M}_{mxn}$ tal que $D = \alpha A$ con $d_{ij} = \alpha a_{ij}$ $\forall_{i}, j$.

Dem. Hecha.

Ejemplo 6: Sean $T_1, T_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

definidos por,

$T_1(1,0,0) = (1,-1,2)$, $T_2(1,0,) = (-1,1,-2)$

$T_1(0,1,0) = (0,1,-1)$, $T_2(0,1,0) = (1,0,1)$

$T_1(0,0,1) = (1,2,0)$, $T_2(0,0,1) = (0,1,1)$

Si $\left[T_1\right]_E^F = A_1$, $\left[T_2\right]_E^F = A_2$, en términos de A_1 y A_2 , encuentre

(1) $\left[T_1+T_2\right]_E^F$?

$$\left[T_1+T_2\right]_E^F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left[T_1\right]_E^F + \left[T_1\right]_E^F$$

(2) $\left[T_1\right]_E^F$?

$$\left[T_1\right]_E^F = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ -\lambda & \lambda & 2\lambda \\ 2 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda\left[T_1\right]_E^F$$

Ejemplo 7: Sea T_1 la t.ℓ. del ejemplo 6 y $T_3 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definido por:

$$T_3(1,0,0) = (1,-1)$$

$$T_3(0,1,0) = (0,1)$$

$$T_3(0,0,1) = (2,3)$$

Encuentre $\left[T_3\ T_1\right]_E^F$

$$\begin{aligned}(T_3T_1)(1,0,0) &= T_3(T_1(1,0,0) = T_3(1,-1,2)\\ &= T_3(1(1,0,0)+(-1)(0,1,0)+2(0,0,1)\\ &= 1\ T_3(1,0,0)+(-1)T_3(0,1,0)+2\,T_3(0,0,1)\\ &= (1,-1) - (0,1) + 2(2,3)\\ &= (5,4)\end{aligned}$$

Análogamente se obtienen las imágenes de los otros vectores

$$\therefore\quad (T_3T_1)_E^F = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[T_3\right]_E^F \left[T_1\right]_E^F$$

Sean $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim U = R$ y E, F, G bases de V, W y U.

$$T_1 \in \mathrm{Hom}(V,W) \quad , \quad T_2 \in \mathrm{Hom}(W,U)$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T_1"] \arrow[rr, bend right, "T_2\,T_1"'] & W \arrow[r, "T_2"] & U \end{tikzcd}$$

entonces $T_2\ T_1 \in \mathrm{Hom}(V,U)$

$$\text{Si}\quad A = \left[T_1\right]_E^F = (a_{ij}) \quad ; \quad B = \left[T_2\right]_F = (b_{ij})$$

entonces definimos $C = B \cdot A = \left[T_2\ T_1\right]_E^F = (C_{ij})$

notemos que A es de $m x n$, B es de $r x m$ y C es de $r x n$

Luego $C = BA$ está definido $\Longleftrightarrow$ # columna de B = # columnas de A y $A+B$ está definido $\Longleftrightarrow$ tamaño de A = tamaño de B.

Sean $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $F = \{w_1, \ldots, w_m\}$ $G = \{u_1, \ldots, u_n\}$

entonces:

$$\begin{aligned}
T_2\ T_1(v_j) &= \sum_i C_{ij}\, u_i \\
&= T_2\ (T_1(v_j)) \\
&= T_2\,(\sum_i a_{ij}\, w_i) \\
&= \sum_i a_{ij}\ T_2(w_i) \\
&= \sum_i a_{ij}\ (\sum_k b_{ki}\, u_k) \\
&= \sum_k (\sum_i a_{ij}\, b_{ki})\, u_k
\end{aligned}$$

luego $C_{kj} = \sum_i b_{ki}\, a_{ij}$

Hemos probado la siguiente Prop.

5.12. Sean V, W, U e.v. sobre K, $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim U = r$ y $T_1 \in Hom(V,W)$, $T_2 \in Hom(W,U)$ y sean E,F,G bases ordenadas de V, W y U respectivamente. Entonces,

Si $A = \left[T_1\right]_E^F$ y $B = \left[T_2\right]_F^G$ se tiene que

$$A\,B = \left[T_2\,T_1\right]_E^F$$

(2) $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ entonces $C = (c_{ij})$

$$\text{con } \; C_{ij} = \sum_k b_{ik}\, a_{kj}$$

Dem. Hecha.

5.13. PROP. (Primera forma canónica de T)

Sean V, W e.v. sobre K, $\dim V = n$, $\dim W = m$ y $T \in Hom(V,W)$. Entonces, existen bases E y F de V,W respectivamente, tal que,

$$\left[T\right]_E^F = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{matrix} r \\ \\ s \end{matrix} \\ \begin{matrix} r & \qquad t \end{matrix} & \end{array}$$

donde $r + t = \dim V$

$r + t = \dim W$

$r = \rho(T)$

la representación de T se llama Primera forma canónica.

(2) Además si E' , F' son bases de V,W respectivamente

$$y \quad [T]_{E'}^{F'} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ell$$

entonces $\ell = \rho(T)$

Dem.: (1) Sea $\dim \operatorname{Ker} T = \eta(T) = t$

$y \; \{ v'_1, \; v'_2, \ldots, \; v' \}$ base $\operatorname{Ker}(T)$

además $\{ v_1, \ldots, v_r \}$ tal que

$E = \{ v_1, \ldots, v_r, v'_1, \ldots, v'_t \}$ es una base de V

y $\rho(T) = r$

Sean $T(v_i) = w_i \quad ; \quad 1 \leq i \leq r$

Luego si $\sum \alpha_i w_i = 0$ tenemos

$$0 = \sum_i \alpha_i \, T(v_i)$$

$$= T \left(\sum_i \alpha_i w_i \right)$$

$$\therefore \sum_i \alpha_i v_i \in \operatorname{Ker} T \Longrightarrow \sum_i \alpha_i w_i = \sum_j \beta_j v'_j$$

$$\sum_i \alpha_i v_i + \sum_j (-\beta_j) v'_j = 0$$

$$\alpha_i = 0 \quad \forall_i$$

$\therefore \{ w_1, \ldots, w_r \}$ es L.I.

sean $\{ w_{1+1}, \ldots, w_m \} \subset W$ tal que

$$F = \{ w_1, \ldots\ldots, w_r, \ldots\ldots, w_m \} \quad \text{es base de } W$$

y se tiene que,

$$T(v_i) = w_1 + 0w_2 + \ldots\ldots + 0w_m$$

$$T(v_i) = 0\,w_1 + \ldots\ldots + 1\,w_i + \ldots\ 0\,w_n \qquad \forall_i = 1, \ldots, r$$

$$T(v_i') = 0 = 0\,w_1 + \ldots\ldots\ldots + 0\,w_m$$

$$T(v_j) = 0 = 0\,w_1 + \ldots\ldots\ldots + 0\,w_m \qquad \forall_j = 1, \ldots\ t$$

$$\therefore \quad [T]_E = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c:c} \begin{matrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{matrix} & O \\ \hdashline O & O \end{array}\right) & \begin{array}{c} r \\ s \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & \quad t \end{array} & \end{array}$$

donde $\dim V = r + t = \rho(T) + \eta(T)$

$\dim W = r + s$

(2) Supongamos que

$$[T]_{E'}^{F'} = \left(\begin{array}{c:c} I_{\ell \times \ell} & O \\ \hdashline O & O \end{array}\right)$$

entonces $T(V) = T(\langle X_1, \ldots\ldots, X_n \rangle)$

$$= \langle T X_1, \ldots\ldots, T X_n \rangle$$

$$= \langle Y_1, \ldots\ldots, Y_\ell, 0, \ldots\ldots, 0 \rangle$$

donde $E' = \{X_1, \ldots, X_n\}$ base de V

$F' = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ base de W

$$\therefore \quad \dim T(V) = \rho(T) = \ell$$

Ejemplo 8: Sea $T \in (\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ con E,F base usuales

$$y \quad [T]_E^F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Encontrar:

(1) $\rho(T)$, $\eta(T)$

(2) Base E' y F' tal que $[T]_E^F$ sea la primera forma canónica.

En efecto

(1) $\rho(T) = \#$ columna L.I. de $[T]_E^F$

$\{(1,1,1) , (-1,0,1)\}$ es L.I.

$$\therefore \quad \rho(T) = 2$$

$$\eta(T) = \dim \mathbb{R}^4 - \rho(T) = 2$$

(2) Debemos encontrar una base del Ker T.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema encontramos que,

$$\operatorname{Ker} T = \langle (2,1,-1,0),\ (1,2,0,1) \rangle$$

$\therefore \quad E'' = \{(2,1,-1,0),\ (1,2,0,1)\}$ base de Ker T

extendemos E" a una base de $\mathbb{R}^4$

$$E' = \{(0,0,1,1),(0,0,1,2),\ (2,1,-1,0),(1,2,0,1)\}$$

y formamos la base de $\mathbb{R}^3$

$$F' = \{T(0,0,1,1),\ T(0,0,1,2),\ W_3\}$$

$$F' = \{(2,1,0),\ (3,0,-3),\ (0,1,1)\}$$

y tenemos que

$$[T]_{E'}^{F'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $\rho(T) + \eta(T) = \dim \mathbb{R}^4$

$$r + t = 4$$

$$2 + 2 = 4$$

$$\rho(T) + s = \dim \mathbb{R}^3$$

$$2 + s = 3$$

$$s = 1$$

y I_{2x2} debe formar el primer bloque.

De las Prop. anteriores podemos observar que si $A \in \mathcal{M}_{mxn}(k)$ entonces podemos considerarla que como una transformación lineal de K^n en K^m en las bases canónicas y en este caso tenemos la siguiente definición.

5.14. DEF. RANGO DE UNA MATRIZ

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(k)$ entonces se define el rango A por

$$\rho(A) = \dim A(K^n)$$

y por lo tanto la nulidad de A es

$$\eta(A) = n - \rho(A)$$

5.15. PROP. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(k)$ entonces

$$\rho(A) = \# \{ \text{columnas L.I. de } A \}$$

Dem.: $\rho(A) = \dim A(K^n)$

$= \dim A \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$

$= \dim \langle A e_1, Ae_2, \ldots, A e_n \rangle$

pero $\{ A(e_1), A(e_2), \ldots, A(e_n) \}$ es el conjunto columnas de A.

5.16. DEF.

$A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se dicen equivalentes ssi representan la misma t. ℓ. Es decir $A \sim B \iff A = [T]_E^F$ y $B = [T]_E^F$

donde $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ y E, F base de V, W.

PROBLEMA:

¿Qué sucede a la matriz de T si se cambian las bases?

Para dar respuesta, primeramente veamos conceptos sobre inverso y la t. ℓ. singulares.

Recordemos que;

$T \in \mathrm{Hom}(V,V)$ es no singular $\iff$ T es 1-1 y sobre

$\iff$ T posee un inverso T^{1},

$T^{-1} \in \mathrm{Hom}(V,V)$

Además,

Si $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ entonces $S \in \mathrm{Hom}(W,V)$ es un inverso izquierdo de T ssi $ST = I_V$ y $R \in \mathrm{Hom}(W,V)$ es un inverso derecho de T ssi $TR = I_W$.

5.17. DEF. MATRIZ SINGULAR

Sea $T \in \mathrm{Hom}(V,V)$ y E base de V con $\# E = n$. Entonces T es no singular $\iff$ $[T]_E^E$ es no singular.

5.18. PROP. Sean V,W e.v. sobre K, $\dim V = n$, $\dim W = m$ y $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$. entonces:

(1) Si $n < m$ $\Longrightarrow$ T no tiene inverso derecho.

(2) Si $m < n$ $\Longrightarrow$ T no tiene inverso izquierdo.

(3) Si $n = m$ $\Longrightarrow$ T tiene inverso derecho ssi T tiene inverso izquierdo.

y se tiene T tiene inverso $\iff$ T es no singular

(4) Si $n < m$ $\Longrightarrow$ A no tiene inverso derecho.

(5) Si $m < n$ $\Longrightarrow$ A no tiene inverso izquierdo.

(6) Si $n = m$ $\Longrightarrow$ A tiene inverso derecho ssi A tiene inverso izquierdo.

y luego A tiene inverso $\Longleftrightarrow$ A es no singular donde

$A \in \mathcal{M}_{mxn}(k)$

Dem. Se deja de ejercicio.

5.19. DEF. MATRIZ DE TRANSICION

Sean V. e.v. sobre K , dim V = n y la base de V

$E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $F = \{w_1, \ldots, w_n\}$. Entonces

ya que $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \quad \forall_i = 1,2,\ldots,n$

la matriz de transición o cambio de base de F a E es,

$$P = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Obs.: Como $F = \{w_i\}_i$ es base $\Longrightarrow \{w_i\}_i$ es L.I.

$\Longrightarrow$ P es invertible.

Luego P^{-1} es la matriz cambio base de E a F.

Consideremos E, F bases de V

$f_i = \sum a_{ij} e_j$ con $e_j \in E$, $f_i \in F$

Luego $P = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nxn}$

cuya j-ésima fila es

$F_j \longrightarrow (a_{1j} + a_{2j} + \ldots\ldots + a_{nj})$ (5-9)

Sea $V \in V$ tal que $v = K_1 f_1 + \ldots\ldots + K_n f_n$

$$v = \sum_{i=1}^{n} K_i f_i$$

$$[v]_E = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix} \qquad (5.10)$$

Sustituyendo los f_i

$$v = \sum_i K_i f_i$$

$$= \sum_i K_i \left(\sum_j a_{ij} e_j \right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_i a_{ij} K_i \right) e_j$$

$$= \sum_j (a_{1j} k_1 + A_{2j} K_2 +/\ldots\ldots + a_{nj} K_n) e_j$$

Por lo tanto

$$[v]_E = \begin{pmatrix} a_{11}K_1 + A_{21}K_2 + \ldots\ldots + a_{n1} k_n \\ a_{1j}K_1 + a_{2j}K_2 + \ldots\ldots + a_{nj}K_n \\ a_{in}K_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nn}k_n \end{pmatrix}$$

De (5.9) y (5.10) tenemos que la j-ésima componente de $P v_F$

Es $a_{ij}k_1 + a_{2j}k_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nj}k_n$

luego: $P[v]_F = [v]_E$

y $[v]_F = P^{-1}[v]_E$

Por lo tanto hemos probado la siguiente Prop.

5.20. PROP. Sea V un e.v. sobre K, dim V = n y E,F bases de V y P la matriz cambio base de E a F

entonces:

$$\forall\, v \in V \qquad P[v]_F = [v]_E$$

$$\text{y} \qquad [v]_F = P^{-1}\,[v]_E$$

Dem.: Hecha

¿De qué forma estan relacionadas $[T]_E$ y $[T]_{E'}$?

Sabemos que:

1) $[T^{-1}]_E = [T]_E^{-1}$

2) $\exists !$ P invertible tal que

$[v]_E = P[v]_{E'}$ $\qquad \forall\, v \in V$

3) $[Tv]_E = [T]_E\,[v]_E$

Aplicando 2) al vector Tv nos queda:

$$[Tv]_E = P[Tv]_{E'}$$

$$\therefore\ [T]_E\,[v]_E = P\,[Tv]_{E'}$$

$$[T]_E\ P[v]_{E'} = P[Tv]_{E'}$$

$$P^{-1}\,[T]_E\,P\,[v]_{E'} = [Tv]_{E'}$$

$$\therefore\ [T]_{E'} = P^{-1}[T]_E\,P$$

ya que: $[Tv]_{E'} = [T]_{E'}\,[v]_{E'}$

Hemos probado la siguiente Prop.

5.21. PROP. Sea V un e.v. sobre K, dim V = n y E,F bases de V, T ∈ Hom (V,V) entonces:

$$[T]_F = P^{-1}\,[T]_E\,P$$

donde P es la matriz cambio base de F o E

Dem.: Hecha.

Ejemplo 9: Sea T ∈ Hom $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que

$T(X,Y) = (4X - 2Y,\ 2X + Y)$

$E = \{(1,0),(0,1)\}$ y $F = \{(1,1),\ (-1,0)\}$ base de V

Encuentre: $[T]_E$, $[T]_F$

1) $T(1,0) = (4,2) = 4(1,0) + 2(0,1)$

$T(0,1) = (-2,1) = -2(1,0) + 1(0,1)$

$$\therefore\ [T]_E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Ahora $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$

$(-1,0) = -1(1,0) + 0(0,1)$

$$\therefore \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $[T]_F = P^{-1}\,[T]_E\,P$

$$[T]_F = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Qué realación existe entre $[T]_E^F$ t $[T]_{E'}^{F'}$?

5.22. <u>PROP.</u> Sean V,W e.v. sobre K y E,E' bases de V, F y F' bases de W y sea la matriz cambio base de E a E', P,(en V) y Q la matriz cambio de base de F a F' (en W).

Entonces: $[T]_E^{E'} = Q^{-1}\,[T]_E^F\,P$

<u>dem.:</u> Se deja de ejercicio.

<u>Obs.:</u> Casos particulares:

a) $[T]_E^{F'} = Q^{-1}\,[T]_E^F$

b) $[T]_{E'}^F = [T]_E^F\,P$

<u>Obs.:</u> De la Prop. anterior:

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ E & V & \xrightarrow{Iv} & V & E' \\ T & \downarrow & & \downarrow & T \\ & W & \xrightarrow[Iw]{} & W & \\ F & & & & F' \\ & & P & & \end{array}$$

$\therefore$ IwoT = ToIv, así el diagrama conmuta

Luego: $Iwo\left[T\right]_E^F = To\left[Iv\right]_E^{F'}$

$\therefore \left[Iw\right]_F^{F'} \left[T\right]_E^F = \left[T\right]_{E'}^{F'} \left[Iv\right]_E^{E'}$

y podemos dar la definición.

5.23. DEF. MATRICES EQUIVALENTES

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{mxm}^{(k)}$. Entonces A es equivalente a B

$A \equiv B \Longleftrightarrow \exists\ P \in \mathcal{M}_{mxm}$ no singular y $Q \in \mathcal{M}_{mxn}$ no singular tal que $A = PBQ^{-1}$

5.24. PROP. Si $A, B \in \mathcal{M}_{mxn}$ son equivalentes, entonces $\rho(A) = \rho(B) \wedge \eta(A) = \eta(B)$

Dem.: se deja de ejercicio

Ejemplo 10: Sean los espacios

$V \langle e_1, e_2 \rangle = \langle (1,-1,0), (0,1,1) \rangle$

$W \langle f_1, f_2, f_3 \rangle = \langle (1,0,1,0), (1,1,0,0), (1,-1,0,1) \rangle$

$T : V \longrightarrow W$ tal que

$T(e_1) = f_1 + 2f_3$

$T(e_2) = 3f_1 - f_2 + f_3$

Encuentre:

1) $\left[T\right]_E^F$?

$$\left[T\right]_E^F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Sean $E' = \{(1,0,1)\ (1,1,2)\}$ base de V

$F' = \{(0,1,1,-1),\ (2,0,0,1),\ (1,0,-1,1)\}$ base de W

$$\left[T\right]_E^{F'} = \ ?$$

encontramos P de E a E'. Sabemos que $P = \left[I_V\right]_{E'}^{E}$

$$\therefore \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} =$$

encontramos Q de F a F'. Se tiene que $Q = \left[Iw\right]_{F'}^{F}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1

$$\therefore \quad \left[T\right]_{E'}^{F'} = Q^{-1}\left[T\right]_E^F P = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 7 & 11 \\ -8 & -13 \end{pmatrix}$$

Ahora examinaremos algunos criterios para una matriz sea singular o no. Estos criterios nos conducirán a técnicas que simplifican los cálculos.

5.25. <u>PROP</u>. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}^{(k)}$ entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) A es no singular

2) Las columnas de A son vectores L.I. en K_n

3) Las filas de A son vectores de L.I. en K^n

Dem.: se deja de ejercicio.

5.26. DEF. ESPACIO FILA Y ESPACIO COLUMNA (EF. y EC.)

Si $A \in \mathcal{M}_{nxm}(K)$ entonces el espacio fila de A es el subespacio de K^m generado por las filas de A. El espacio columna A es el subespacio de K^n generado por las columnas de A.

5.27. PROP. Si $A \in \mathcal{M}_{mxn}$ entonces A es no singular

$\Longleftrightarrow$ dimensión del espacio fila de A es n

$\Longleftrightarrow$ dimensión del espacio columna de A es n

Dem.: se deja de ejercicio.

Obs.: De lo anterior se tiene $A \in \mathcal{M}_{nxn}$

rango columna de A $\rho_e(A_e) = \dim \langle c_1, \ldots\ldots, c_n \rangle$

rango fila de A $\rho_f(A) = \dim \langle f_1, \ldots\ldots, f_n \rangle$

Si $\rho(A_f) = \rho(A_c) \Longrightarrow \rho_c(A) = \rho(A) = \rho_f(A)$

Ejemplo 11: Sea $\left[T\right]_E^F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

se tiene que $\eta(T) = 1 \Longrightarrow \rho(T) = 2$

$$EC = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

pero $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\therefore \quad EC = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ es base de EC}$$

$$\Longrightarrow \dim EC = 2$$

$EF = \langle (1,2,3),\ (0,1,2),\ (1,1,1) \rangle$

pero $(1,1,1) = 1\ (1,2,3) + (-1)\ (0,1,2)$

$\therefore\ EF = \langle (1,2,3),\ (0,1,2) \rangle$

y $\{ (1,2,3),\ (0,1,2) \}$ es base de EF

Dim EF = 2

$\therefore\ \rho(A) = 2 \Longrightarrow \eta(A) = 1$

$\therefore$ A no es invertible

Veamos ahora las operaciones sobre las filas y las columnas de una matriz.

5.28. DEF. OPERACIONES ELEMENTALES FILAS

Sea $A \in \mathcal{M}_{mxn}^{(k)}$, entonces se definen las operaciones elementales sobre filas en A po:

1) Multiplicación de la i-ésima fila por una constante $\propto \neq 0$
   $A \longrightarrow A'$
   Si $E_i^F(\propto)$ es la matriz I con su i-ésima fila multiplicado por $\propto$ entonces $A' = E_i^F(\propto) A$

2) Intercambio de la fila i con la fila j : $A \longrightarrow A''$
   Si $E_{ij}^F \Longrightarrow A'' = E_{ij}^F A$

3) Sumar $\propto$ veces la i-ésima fila a la j-ésima fila
   $(i \neq j)$: $A \longrightarrow A'''$
   Si $E_{ij}^F(\propto) \Longrightarrow A''' = E_{ij}^F(\propto) A$

   donde $I = I_{mxm}$

5.29. <u>DEF. MATRICES ELEMENTALES FILA</u>

Las matrices $E_i^F(\propto)$, E_{ij}^F, $E_{ij}^F(\propto)$ se llaman matrices elementales. Las que se obtienen de $I = I_{mxm}$ efectuando las operaciones, sobre las filas, indicadas.

5.30. <u>DEF. OPERACIONES ELEMENTALES COLUMNAS</u>

Sea $A \in \mathcal{M}_{mxn}(*)$, entonces se definen las operaciones elementales sobre columnas de A por

1) Multiplicación de la i-ésima columna por una contante $\alpha \neq 0$

$: A \longrightarrow A'$

si $E_i^C(\alpha) \Longrightarrow A' = A\, E_i^C(\alpha)$

2) Intercambio de las i-ésimas y j-ésima columna : $A \longrightarrow A''$

Si $E_{ij}^C \Longrightarrow A'' = A\, E_{ij}^{C'}$

3) Sumar veces la i-ésima columna a la j-ésima columna :

$A \longrightarrow A''$

Si $E_{ij}^C(\alpha) \Longrightarrow A''' = A\, E_{ij}^C(\alpha)$

donde $I = I_{nxn}$

5.31. DEF. MATRICES ELEMENTALES COLUMNAS

Las matrices $E_i^C(\alpha)$, E_{ij}^C, $E_{IJ}^C(\alpha)$ se llaman matrices elementales columnas, las que se obtienen de $I = I_{nxn}$ efectuando las operaciones, sobre las columnas indicadas.

5.32. PROP. Toda matriz elemental es no singular

Dem.:

1) $E_i^C(\alpha)\; E_i^C(\alpha^{-1}) = I$

$E_i^f(\alpha)\; E_i^F(\alpha^{-1}) = I$

2) $E^{C}_{ij} \; E^{C}_{ij} = I$

$E^{F}_{ij} \; E^{F}_{ij} = I$

3) $E^{C}_{ij}(\alpha) \; E^{F}_{ij}(-\alpha) = I$

$$E^{F}_{ij}(\alpha) \, E^{F}_{ij}(-\alpha) = I$$

5.33. PROP. El inverso de una matriz elemental es una matriz elemental.

Dem.: Hecha

5.34. PROP. Si A, B$\in \mathcal{M}_{mxn}$ y B se obtiene realizando sobre A una sucesión de operaciones elementales sobre filas y columnas, entonces A es equivalente a B

Dem.: Se deja de ejercicio.

Obs.: De las Prop. anteriores se deduce que toda matriz elemental fila es equivalente a alguna matriz elemental columna, luego podemos usar el término matriz elemental.

5.35. PROP. Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}(k)$. Entonces A es no singular $\Longleftrightarrow \exists$ matrices elementales $E_1, E_2, E_3 \ldots E_m$ tales que $A = E_1 \; E_2, \ldots \ldots E_m$

Dem.: Se deja de ejercicio

5.36 DEF. MATRICES EQUIVALENTES

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{mxn}$ entonces $A \sim B \Longrightarrow \exists$ una sucesión de operaciones elementales sobre filas y columnas que cambian A en B.

5.37. PROP. Sea $A \in \mathcal{M}_{mxn}(K)$. Entonces

$\rho(A) = r \iff \exists$ una sucesión de operaciones elementales sobre filas y columnas de A que la transforman en:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_{rxn} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ejemplo 12:

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{entonces}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \rho(A) = 2$

5.38. DEF. CALCULO DE MATRIZ INVERSA

De la Prop. 5.35 tenemos que si $P \in \mathcal{M}_{nxn}$, P es no singular $\Longleftrightarrow \exists$ una sucesión $E_1, \ldots, E_r$ de aperaciones elementales sobre fila, tal que

$$P = E_1\, E_2 \cdots\cdots E_r$$

entonces $E_r^{-1} \ldots\ E_2^{-1}\, E_1^{-1}\quad P = I$

$\therefore\ P^{-1}$ es el producto de matrices filas elementales que transforman P en I

Ejemplo 13: $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Encontramos una sucesión de operaciones filas tales que P en I, formemos $(P : I) \longrightarrow (I : P^{-1})$

$$\therefore \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & . & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & . & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & . & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & . & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.39. EJERCICOS PROPUESTOS

1. Hacer las demostraciones pendientes

2. Sean $T \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, E base usual de $\mathbb{R}^3$

$$y\,[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre:

a) $\rho(T)$, $\eta(T)$

b) Base F y G de $\mathbb{R}^3$, tales que $[T]_F^G$ es la primera forma canónica de T.

c) P y Q , P^{-1} , Q^{-1} matrices de transición

3. Id. que 2. para $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Pruebe que: A y B son equivalentes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix} \quad y\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. ¿Se pueden usar solamente 2 operaciones elementales filas o columnas? ¿Cuál se elimina?

6. Demuestre que

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ es no singular y encuentre su inverso

7. Demuestre que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ es no singular escribiéndola como un producto de matrices elementales.

8. Sea la t.ℓ. T tal que

$T(1,1) = (0,1,2)$ y $T(-1,1) = (2,1,0)$

encuentre $[T]_E^F$ donde $E = \{(1,1),\ (1,1)\}$ y

F es la base usual de $\mathbb{R}^3$

9. Sean $T_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T_1(X,Y,Z) = (X+Y,\ Y+Z)$

$T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T_2\ (X,Y) = (X_1\ X+Y)$

encuentre T_2T_1; $[T_2T_1]_F^E$; $[T_2]_E$; $[T_1]_F^E$

$[T_2]_F^E$ $[T_1]_F^E$ donde E, F base usuales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

6. ECUACIONES LINEALES

6.1. DEF. SISTEMA DE ECUACION

1. Se define el sistema de ecuaciones lineales de n variables y m ecuaciones por

$$\begin{aligned} a_{11} X_1 + \dots + a_{1n} X_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} X_1 + \dots + a_{mn} X_n &= b_m \end{aligned} \qquad (6\text{-}1)$$

con $a_{ij}, b_i \in k$; $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$

2. $(Y_1, \dots, Y_n) \in K^n$ se dice que es solución del sistema si satisface cada una de las m ecuaciones.

3. Si se tiene que $\forall_i$, $b_i = 0$ entonces el sistema se llama homogéneo.

4. La matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}{}^{(k)}$ se llama matriz de coeficiente del sistema.

5. El sistema (6-1) se puede escribir en la forma matricial

$$AX = B$$

donde

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

$$X = (X_j) \in \mathcal{M}_{n \times 1}$$

$$B = (b_i) \in \mathcal{M}_{m \times 1}$$

Ahora debemos estudiar las soluciones del sistema

¿si estas existen?

En efecto consideremos la t. ℓ .

$$A : K^n \longrightarrow K^m$$

cuya matriz asociada a la base canónica, E, es la matriz de coeficientes, es decir

$$[A]_E = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema (.1) se puede escribir en la forma matricial.

$$[A]_E \, [X]_E = [B]_E$$

o en la forma

$$A X = B$$

que nos permite ver a un sistema como una ecuación de operadores (vistas en el punto 4).

Tenemos entonces $A \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ y

$$\begin{aligned} A X = B \text{ tiene solución } &\Longleftrightarrow B \in J_m(A) \\ &\Longleftrightarrow B \in \text{Espacio columnas de } A \\ &\Longleftrightarrow \dim\langle V_1, V_2, \ldots, V_n\rangle = \dim\langle V_1, \ldots, V_n, B\rangle \\ &\Longleftrightarrow \rho(A) = \rho(A:B) \end{aligned}$$

donde $V_1, V_2, \ldots, V_n$ son los vectores columnas de A y (A:B) es la matriz ampliada del sistema definida por

$$(A:B) = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } j \leq n \\ A_{i(n+1)} = B_i & \end{cases}$$

Hemos probado, por lo tanto, la siguiente Prop.

6.2. PROP. EL SISTEMA DE ECUACIONES

$$A\ X = B$$

Tiene solución ssi $\rho(A) = \rho(A:B)$

Dem. Hecha

Veamos ahora cuales son las soluciones sistema

Consideremos el sistema homogéneo

$AX = 0$ asociado al sistema $AX = B$

ya que $A \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ se tiene trivialmente que $AX = 0$ siempre tiene solución y su conjunto solución es $\mathrm{Ker}\ (A)$

Supongamos que X_o es una solución particular de $AX = B$ entonces $\forall x \in \mathrm{Ker}(A)$ se tiene

$$\begin{aligned} A(X_o+X) &= A(X_o) + A(X) \\ &= B + 0 = B \end{aligned}$$

Luego $X_o + X$ es una solución de $AX = B$

Por otro lado si Y es solución $AX = B$

se tiene $Ay = B$. Entonces

$$\begin{aligned} A(Y - X_o) &= AY - AX_o \\ &= B - B = 0 \end{aligned}$$

Luego $A(Y-X_o) = 0 \Longrightarrow Y - Y_o \in \mathrm{Ker}(A)$

$$\Longrightarrow Y - Y_o = X$$

$$\Longrightarrow Y = X + X_o$$

es decir toda solución de $AX = B$ es de la forma $X + X_o$

Hemos probado las siguientes Prop.:

6.3. Prop. Si el sistema $AX = B$ tiene solución y X_o es una solución particular. Entonces el conjunto de todas las soluciones es $X_o + \text{Ker}(A)$

Dem. Hecha

6.4. Prop. Si el sistema $AX = B$ tiene solución. Entonces $AX = B$ tiene una única solución ssi $\text{Ker}(A) = 0$

Dem. $AX = B$ tiene solución $\Longrightarrow$ el conjunto solución es $X_o + \text{Ker}(A)$ con X_o una solución particular.

Entonces $\text{Ker}(A) = 0 \Longleftrightarrow$ la solución es única, X_o

6.5. Prop. El sistema homogéneo $AX = 0$

Siempre tiene una solución y el conjunto solución es $\text{Ker}(A)$

Dem. Hecha

6.6. Prop. El sistema $AX = 0$

1) Tiene una única solución la trivial

$X = 0$ si $\text{Ker}(A) = \{0\}$

2) Tiene una solución diferente de la trivial si el número de variables (n) es mayor que el número de ecuaciones (m).

Dem. $AX = 0 \Longrightarrow$ el conjunto solución es $\text{Ker}(A)$

Sabemos que:

$$\dim K^n = \rho(A) + \eta(A)$$

si $\rho(A) = n \implies \eta(A) = 0$

$\implies \operatorname{Ker}(A) = 0$

$\implies AX = 0$ tiene sólo la solución $X = 0$

Si $\rho(A) < \eta \implies \eta(A) > 0$

$\implies \operatorname{Ker} A \neq \{0\}$

$\implies AX = 0$ tiene solución diferente de la trivial cuando $m < n$.

<u>Ejemplo 1 :</u> Consideremos el sistema

$$a X_1 + b X_2 = b_1$$

$$c X_1 + d X_2 = b_2$$

Luego su representación matricial es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

<u>Caso 1:</u> $\rho(A) = 2 \implies \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ son L.I.

$\implies \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\}$ en base de $\mathbb{R}^2$

$\implies \rho(A:B) = 2$

$\implies AX = B$ tiene solución

Luego $\dim \mathbb{R}^2 = \rho(A) + \eta(A) \Longrightarrow \eta(A) = 0$

$\Longrightarrow \operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$AX = 0$ tiene una única solución y el

$AX = B$ tiene una solución única

De otra forma de ver lo mismo es:

Las columnas de A son L.I. $\Longrightarrow \exists\ A^{-1}$ y $AX = 0$

$\Longrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}0$

$\Longrightarrow A^{-1}AX = 0$

$\Longrightarrow X = 0$

$\Longrightarrow \operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

<u>Caso 2:</u> $\rho(A) = 1 \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ son L.D.

$\Longrightarrow \exists\ \alpha, \beta \in K$ tal que

$\alpha \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y α, β no ambos nulos

$\Longrightarrow$ si $\beta \neq 0$: $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \left(-\frac{\alpha}{\beta} \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \right)\right)$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sino $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Longrightarrow A = 0$ y $\rho(A) = 0$

Luego si hacemos $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ se tiene que

$AX = B$ tiene solución $\Longleftrightarrow \rho(A:B) = 1$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\Longleftrightarrow \exists\, \delta \text{ tal que } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

En este caso el sistema se reduce a

$$\begin{aligned} aX + \lambda a Y &= \delta a \\ cX + \lambda c Y &= \delta c \end{aligned}$$

Una solución particular es $X_o = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$ y la solución general es

$$X_o + \text{Ker}(A) = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Ker}\, A$$

$$= \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;/\; \begin{aligned} ax + \lambda ay &= 0 \\ cx + \lambda cy &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

<u>Caso 3:</u> $\rho(A) = 0 \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$ $Ax = B$ tiene solución ssi $\rho(A:B) = 0$

$\Longleftrightarrow b_1 = b_2 = 0$

Si $b_1 = b_2 = 0 \Longrightarrow$ la solución de $Ax = B$ es $\text{Ker}(A) = \mathbb{R}^2$

<u>Ejemplo 2:</u> El sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 3 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_4 - 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

a) Tiene solución

b) Tiene una única solución

c) Tiene más de una solución

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 2 & -3 & 6 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & -3 & 6 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore \ \rho(A) = \rho(A:B) = 3 \Longrightarrow$ Sistema tiene solución

Para encontrar las soluciones analizamos $AX = 0$

pero $\rho(A) = 3 \Longrightarrow \eta(A) = 2$

$\Longrightarrow \mathrm{Ker}(A) \neq 0$

$\Longrightarrow AX = 0$ tiene más de una solución y $A.X = B$ también

Para el sistema $AX = 0$ tenemos su solución es

$\mathrm{Ker}\ A = \langle (-5, -3, 0, 3, 1), (3,4,1,0,0) \rangle$

$X_1 = 3x_3 - 5X_5 \ : \ X_2 = 4X_3 - 3X_5 \ ; \ X_4 = 3X_5$

Encontramos ahora una solución particular de $AX = B$

dando valores á X_3 y X_5. En efecto

$$\text{si } X_3 = 0 \qquad X_5 = 1$$

$$\begin{aligned} 2X_1 - 3X_2 + 2X_4 &= 8 \\ X_2 + X_4 &= 1 \\ X_4 &= 5 \end{aligned}$$

$X_o = (-7, -4, 0, 5, 1)$

Entonces la solución general de $AX = B$ es

$y = X_o + \text{Ker}A$

$$Y = (-7,-4,0,5,1) + \langle(-5,-3,0,3,1),(3,4,1,0,0)\rangle$$

$$= (-7,-4,0,5,1) + \alpha(-5,-3,0,3,1) + \beta(3,4,1,0,0)$$

$$= (-7-5\alpha+3\beta,\ -4-3\alpha+4\beta,\ \beta,\ 5+3\alpha,\ 1+\alpha)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

6.7. Ejercicios Propuestos

a) Tienen solución
b) Tienen una única solución
c) Tienen más de una solución

Los sistemas

1) $$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + y \quad 2z &= 1 \end{aligned}$$

2) Dar C.N.S. para K.

$$\begin{aligned} Kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 6 \\ -x + y - z + w &= 5 \\ 2x + y + 4z + 3w &= 1 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 0 \\ x - z &= 0 \end{aligned}$$

5) Dar C.N.S. para $Y_1, Y_2, Y_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= Y_1 \\ x + 2y + 3z &= Y_2 \\ x - z &= Y_3 \end{aligned}$$

7. AUTO VALORES Y AUTOVECTORES

Hasta ahora hemos estudiado las t. ℓ . generales. Se han representado mediante matrices, que nos ha ayudado a la mejor comprensión de cómo operan.

La idea es representar las t. ℓ. por medio de matrices simples, por ejemplo las diagonales, entonces surgen las siguientes interrogantes.

¿Se puede representar todo operador lineal por medio de una matriz diagonal con respecto a una base?

¿Si no es posible representar un operador lineal por una matriz diagonal, cuál es el tipo más sencillo de matriz para representarla?

¿Cómo se encuentra la base, para lo cual existe una representación diagonal de la t. ℓ.?

Las respuestas a estas preguntas se basan en el concepto de autovalores y autovectores.

También encontraremos con ellos un método más simple para resolver sistemas de ecuaciones y ecuaciones con operadores.

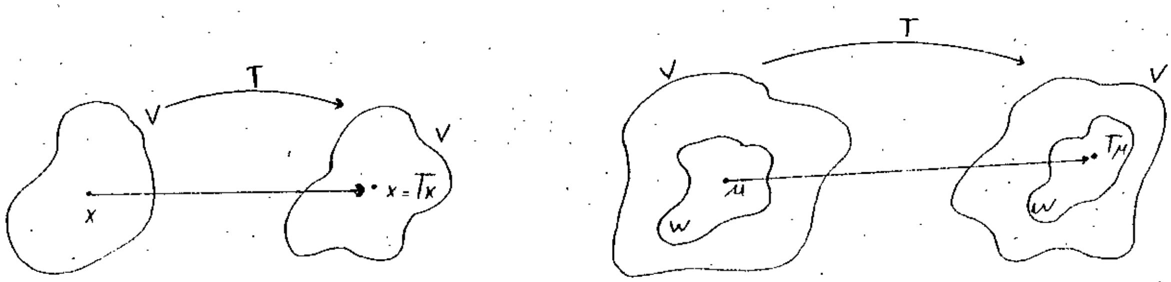
7.1. DEF. VECTOR FIJO

Sea V un e.v. sobre K y T un operador lineal sobre V. Entonces el vector x, $x \in V$, se dice fijo bajo T, si $Tx = x$

7.2. DEF. SUBESPACIO INVARIANTE

Sean V un e.v. sobre K, T un operador lineal sobre V y $W \leq V$. Entonces el subespacio W de V, se dice invariante bajo T ssi,

$$\forall u \in W \Longrightarrow Tu \in W$$



7.3. DEF. VALOR PROPIO (v.p.)

Sea V un e.v. sobre K y T un o. ℓ. sobre V. Diremos que $\lambda \in K$ es un valor propio de T ssi existe $v \in V$, $v \neq 0$ talque $Tv = \lambda v$

7.4. DEF. VECTOR PROPIO (ve.p.)

Sean V un e.v. sobre K y $T \in Hom(V,V)$. Entonces si $\lambda \in K$ es un valor propio de T diremos que, el vector $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$, es un vector propio asociado al valor propio λ.

7.5. DEF. SUBESPACIO PROPIO (s.e.p.)

Sean V un e.v. sobre K y $T \in Hom(V,V)$. Entonces la colección de todo los vectores $x \in V$ tales que $Tx = \lambda x$ se llama subespacio propio correspondiente a λ y lo denotaremos por $M_\lambda = \{ x \in V / Tx = \lambda x \}$

7.6. <u>PROP.</u> Sea V un e.v. sobre K y $T \in Hom(V,V)$

Entonces $M_\lambda \leq V$

Dem.: 1) $M_\lambda \neq 0$

$$\text{Sea } x = 0 \in V \Longrightarrow To = \lambda o = 0$$

$$\Longrightarrow 0 \in M_\lambda$$

2) $X, Y \in M_\lambda \Longrightarrow X + Y \in M_\lambda$

p.d. $T(x+y) = \lambda (x+y)$

En efecto $T(x+y) = Tx + Ty$

$$= \lambda x + \lambda y$$

$$= \lambda (x+y)$$

3) $X \in M_\lambda \ \alpha \in K \Longrightarrow \alpha x \in M_\lambda$

p.d. $T(\alpha X) = \lambda (\alpha X)$

En efecto $T(\alpha X) = \alpha T(X)$

$$= \alpha (\lambda X)$$

$$= \lambda (\alpha X)$$

<u>Obs.:</u> 1) $\dim M_\lambda \geq 1$ y $\dim M_\lambda \leq \dim V$

2) Sabemos que el conjunto solución de la ecuación $Ax = \lambda x$ es un subespacio.

$$S = \{ X / Tx = \lambda x \} \leq V$$

si λ es un valor propio de T entonces $S \leq V$ no es nulo, $S \neq \{0\}$

3) Si $Tx = \lambda x \implies (T-\lambda I)\,x = 0$

$\implies S = \mathrm{Ker}(T-\lambda I)$

donde S es el conjunto solución

Por la Obs. 2 , tnemos que si λ es un valor propio de T, entonces,

$$\mathrm{Ker}(T-\lambda I) \neq \{0\}$$

es decir T es no inyectiva

Por el contrario si $\mathrm{Ker}(T-\lambda I) \neq \{0\} \implies \lambda$ es un valor propio de T.

4) Sabemos que si dim V = n entonces $(T-\lambda I)$ es no inyectiva ssi $\det(T-\lambda I) \neq 0$

Hemos probado, entonces, la siguiente Prop.

7.7. <u>PROP.</u> Sea V un e.v. sobre K con dim V=n, $T \in \mathrm{Hom}(V,V)$.

Entonces si $\lambda \in K$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1) λ es un valor propio de T..

2) El operador $(T-\lambda I)$ es singular(no invertible).

3) $\det(T-\lambda I) = 0$

Dem. Hecha.

<u>Obs.:</u> La afirmación (3), $\det(T-\lambda I) = 0$ nos indica como se pueden encontrar los v.p. de T. Como $\det(T-\lambda I)$ es un polinomio de grado n en la variable λ , se determinan los v.p. como las raices de tal polinomio.

7.8. PROP.: Sea $T \in Hom(V,V)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ valor propio de T. Entonces:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies M_{\lambda_1} \cap M_{\lambda_2} = \{0\}$$

Dem.: λ_1, λ_2 v.p. de T $\implies$ $Tv = \lambda_1 v$

$Tv = \lambda_2 v \quad ; \quad v \neq 0$

Sea $v \in M_{\lambda_1} \cap M_{\lambda_2} \implies Tv = \lambda_1 v = \lambda_2 v_2$

$\implies (\lambda_1 - \lambda_2)\, v = 0$

$\implies v = 0$

$\implies M_{\lambda_1} \cap M_{\lambda_2} = \{0\}$

7.9. PROP. Sea V un e.v. sobre K con dim $V = n$ y $T \in Hom(V,V)$. Si X_i $\forall_i = 1, \ldots, n$ son vectores propios de T asociados a los valores propios diferentes, λ_i $\forall_i = 1, \ldots, n$, entonces $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es L.I.

Dem.: 1) Si se tiene un solo vector propio X_1, la Prop. es evidente ya que $X_1 \neq 0$

2) A partir de (1) razonemos por inducción

a) Supongamos válida la Prop. para n-1 vector propio.

b) p.d. que se cumple para n vectores.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vectores propios asociados, respectivamente, a distintos valores propios. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$$\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n = 0 \implies \qquad (7-1)$$

$$T(\alpha_1 X_1 + \ldots\ldots + \alpha_n X_n) = T(0) \Longrightarrow$$

$$\alpha_1 T(X_1) + \ldots\ldots + \alpha_n T(X_n) = 0 \Longrightarrow$$

$$\alpha_1(\lambda_1 X_1) + \ldots\ldots + \alpha_n(\lambda_n X_n) = 0 \qquad (7\text{-}2)$$

Tenemos de (7.1) que

$$\lambda_n \alpha_1 X_1 + \ldots\ldots + \lambda_n \alpha_n X_n = 0$$

De (7-1) y (7-2) restando se tiene

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)\, X_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_n)\, X_2 + \ldots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) X_{n-1} = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots = \alpha_{n-1} = 0$$

Luego en (7-1) $\alpha_n X_n = 0 \Longrightarrow \alpha_n = 0$

Por lo tanto $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n$

Luego $\{X_1, \ldots, X_n\}$ es L.I.

Sea E una base V y $T \in \mathrm{Hom}(V,V)$ tal que $[T]_E = A$, $A \in \mathcal{M}_{nxn}$. Sabemos que $(T - \lambda I)$ es invertible ssi la matriz $(A - \lambda I)$ es invertible. En consecuencia tenemos la siguiente:

7.10. <u>DEF.:</u>

Si $A \in \mathcal{M}_{nxn}(k)$. Entonces $\lambda \in K$ es un valor propio de A si la matriz $(A - \lambda I)$ es singular (no invertible).

<u>Obs.:</u> 1) En base al punto 5, tenemos que se puede definir las v.p. y ve.p. de una matriz A en forma equivalente a una t. ℓ.

2) Ya que λ es v.p. de A ssi $\det(A-\lambda I) = 0$

ssi $\det(\lambda -A) = 0$

Entonces podemos construir la matriz $(X I - A)$ con elementos polinómicos y considerar el polinomio $f(x) = \det(XI - A)$ y tenemos que los $\lambda \in K$ tales que $f(\lambda) = 0$ son los valores propios de A.

7.11. DEF. Matriz, polinomio característico

Si $A \in \mathcal{M}_{nxn}(k)$ entonces se define

1) La amtriz característica por

$$A - \lambda I$$

2) El polinomio característico

$$f(\lambda) = \det(A-\lambda I)$$

7.12. PROP.: Sea $T \in Hom(V,V)$, E base de V y $A \in \mathcal{M}_{nxn}(k)$.
Entonces si $A = [T]_E \Longrightarrow$ valores propios de T y A son iguales.
(A como elemento de $Hom(K^n , K^n)$)

Dem.: Si E $\{ v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \}$ base de V tal que $A = [T]_E$

Entonces se tiene:

valor propio de A $\Longleftrightarrow \exists\ x \in K^n$, $X \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$

$\Longleftrightarrow T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \lambda (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i)$

con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \neq 0$

$\Longleftrightarrow \lambda$ es un valor propio de T

<u>Obs.:</u> 1) Recordemos que $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$ son similares

$$A \sim B \iff \exists\ P \in \mathcal{M}_{n\times n}(k) \text{ no singular tal que}$$

$$B = P^{-1} A P$$

2) Si $[A] = [T]_E$ entonces $A \sim B \iff \exists\ F$, F base de V, tal que $[T]_F = B$

7.13. <u>PROP.</u> Las matrices similares (o semejantes) tienen el mismo polinomio característico.

Dem.: p.d. $\det(XI - B) = \det(XI - A)$

$$A \sim B \iff B = A^{-1} A P$$

luego $\det(XI - B) = \det(XI = P^{-1} A P)$

$$= \det(P^{-1}(XI - A)P)$$

$$= \det P^{-1} \cdot \det(XI - A) \cdot \det P$$

$$= \det(XI - A)$$

<u>Ejemplo 1:</u> Sea $[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}_{2\times 2}$

Entonces $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$$

$$f(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm i \notin \mathbb{R}$$

Luego T no tiene valores propios.

<u>Ejemplo 2:</u> Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}_{3\times 3}$

entonces,

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$$f(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \lambda = 2 \text{ son los v.p. de } A$$

($\lambda = 2$ tiene multiplicidad 2)

Encontremos los

Para $\lambda = 1$ se tiene $Av = \lambda v$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2

(Debemos encontrar Ker A)

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow z = 2x \wedge y = 0$$

$$\Longrightarrow M_{\lambda=1} = \langle (1,0,2) \rangle \text{ con } \dim M_1 = 1$$

Para $\lambda = 2$ se tiene $Av = \lambda v$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow y = x \wedge z = 2y$$

$$\Longrightarrow M_{\lambda=2} = \langle (1,1,2) \rangle \text{ con } \dim M_2 = 1$$

En el ejemplo anterior podemos observar que:

$\dim V = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\dim M_{\lambda=1} = 1 \qquad M_{\lambda=1} = \langle v_1 \rangle = \langle (1,0,2) \rangle$

$\dim M_{\lambda=2} = 1 \qquad M_{\lambda=2} = \langle v_2 \rangle = \langle (1,1,2) \rangle$

$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 2$ (multiplicidad 2)

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies M_{\lambda_1} \cap M_{\lambda_2} = \{ 0 \}$

$S = \{ \lambda / \lambda$ es v.p. diferente $A \} = \{ 1,2 \}$

$\# S \leq \dim V \implies \# S = 2 < \dim R^3 = 3$

Además $\dim M_{\lambda_1} + \dim M_{\lambda_2} = 2 \neq \dim R^3$ y

$\{ v_1, v_2 \}$ es L.I. $\implies \{ v_1, v_2 \}$ es parte de una base de $\mathbb{R}^3$

7.14. PROP. Sea V un e.v. dobre K y $T \in Hom(V,V)$ y $\dim V = n$

Entonces si $S = \{ \lambda / \lambda$ es v.p. de T diferente $\}$

$\implies \# S \leq n$

Dem.: $f(\lambda) = \det(T - \lambda I) \implies f(\lambda)$ es un polinomio de grado n.

$\implies f(\lambda)$ tiene n raices

$\implies \# S \leq n$

7.15. DEF.: t. ℓ. diagonalizable.

Sea V un e.v. con dim V = n y $T \in Hom(V,V)$. Entonces diremos que T es diagonalizable si existe una base $E = \{X_1, \ldots, X_n\}$ de V tal que cada vector $X_i \in E$ es un vector propio de T.

Analicemos esta definición. En efecto

Sea $E = \{X_1, \ldots, X_n\}$ base de V tal que cada X_i es un ve.p. de T, entonces $T_{X_i} = \lambda_i X_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$

$$TX_1 = \lambda_1 X_1 = \lambda_1 X_1 + 0\, X_2 + \ldots + 0\, X_n$$

$$TX_2 = \lambda_2 X_2 = \lambda_2 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + 0 X_n$$

$$TX_n = \lambda_n X_n = 0\, X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$$

Luego $[T]_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \lambda_2 & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{pmatrix}$

donde los λ_i son los v.p. de T. Estos v.p. pueden ser todos diferentes o algunos repetirse.

Recíprocamente si T es diagonalizable y sus valores propios son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Entonces,

(1) Si los λ_i son todos diferentes existe una base E de V tal que;

$$[T]_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \lambda_2 & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico es:

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

2) Si cada uno de los λ_i se repite d_i veces tal que $\sum_{i=1}^{k} d_i = \dim V$, existe una base de V tal que

$$[T]_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & 0 & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & 0 & & & & \lambda_k \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2 I_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & \lambda_k I_k \end{pmatrix}$$

donde I_i es la matriz identidad de $d_i \times d_i$

y tenemos que el polinomio característico es

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \ldots\ldots (\lambda - \lambda_k)^{d_k}$$

3) Si $\sum_{i=1}^{k} di < \dim V$ entonces existe una base tal que $[T]_E$ es triangular.

Tenemos, entonces, vistas las siguientes Prop.

7.16. <u>PROP.</u> Sea V un e.v. de dim V = n y $T \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Además sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ los valores propios distintos de T, y los M_{λ_1} subespacios propios asociados a cada v.p. λ_i. Si $V = M_{\lambda_1} + \ldots\ldots + M_{\lambda_k}$ entonces,

$$\dim V = \dim M_{\lambda_1} + \dots + \dim M_{\lambda_k}$$

Es decir, si E_i es una base de M_{λ_i} , entonces,

$E = \{E_1, \dots, E_k\}$ es una base de V

Dem.: Se deja de ejercicio

7.17. PROP. Sea V un e.v. de dim V = n y $T \in \mathrm{Hom}(V,V)$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ los valores propios distintos de T y los M_{λ_i} subespacios propios asociados a cada λ_i . (M_{λ_i} el espacio nulo de $(T-\lambda_i I)$). Entonces son equivalentes

1) T es diagonalizable

2) El polinomio característico de T es

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{d_k}$$

y $\dim M_{\lambda_i} = d_i$; $i = 1,2,\dots,k$

3) $\dim M_{\lambda_1} + \dots + \dim M_k = \dim V$

Dem.: Se deja de ejercicio.

Ejemplo 3: Tomando el ejemplo se tiene;

$$M_{\lambda_1} = \langle (1,0,2) \rangle \quad \text{con} \quad \lambda_1 = 1$$

$$M_{\lambda_2} = \langle (1,1,2) \rangle \quad \text{con} \quad \lambda_2 = 2$$

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

pero dim $M_{\lambda_2} = 1 \neq 2$

$$\dim M_{\lambda_1} + \dim M_{\lambda_2} = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

Luego T no es diagonalizable.

7.18. <u>PROP.</u> Sea V un e.v. sobre K de dim V = n y T Hom(V,V). Entonces se tiene

1) Existe una base E de V tal que $[T]_E$ es diagonal ssi T tiene n vectores propios L.I.

2) Si para una base E de V se tiene

$$[T]_E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

entonces los $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son exactamente los valores propios de T.

3) Si T tiene n valores propios diferentes entonces existe una base E de V para la cual $[T]_E$ es diagonal.

4) Sea $A \in K_{nxn}$. Entonces existe $P \in K_{nxn}$ tal que $P^{-1}AP$ es diagonal ssi A tiene n vectores propios L.I. en K^n.

5) Si $A \in K_{nxn}$ y P K_{nxn} es tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

entonces $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son exactamente los valores propios de A.

6) Si $A \in K_{nxn}$ tiene n valores propios diferentes, entonces existe $P \in K_{nxn}$ tal que

$$P^{-1}AP \text{ es diagonal}$$

Dem.: 1) ($\Longrightarrow$) Si $[T]_E = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ y $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y tenemos que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ y luego T tiene n vectores propios L.I.

($\Longleftarrow$) Si T tiene n vectores propios L.I. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ entonces $E = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de V ya que dim V = n y como $T(v_i) = \lambda_i v_i$ se tiene $[T]_E = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

2) Los valores propios de T y de $[T]$ son los mismos para cualquier base E de V.

Consideremos:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Supongamos $Ax = \lambda' x$ con $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$

tenemos $\lambda_n x_n = \lambda' x_n$, $\lambda_{n-1} x_{n-1} + \ldots x_n = \lambda \cdot x_{n-1}$)

Si suponemos $x_1 = \ldots = x_i = 0$, $x_{i-1} \neq 0$ (un tal i existe ya que $x \neq 0$). Entonces tenemos

$$\lambda_{i-1} x_{i-1} = \lambda x_{i-1}$$

$$\lambda' = \lambda_{i-1}$$

Luego los valores propios λ de A son un subconjunto de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Recíprocamente.

$$A - \lambda_i I = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_i & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \lambda_i - \lambda_i & \\ & \bigcirc & & \ddots \\ & & & \lambda_n - \lambda_i \end{pmatrix}$$

es singular y entonces existe $x \neq 0$ tal que $(A - \lambda_i I)x = 0$

Luego $A \cdot x = \lambda_i X$, es decir λ_i es un valor propio de A.

3) Es inmediata de la Prop. 7.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son valores propios diferentes de T entonces $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ L.I. con $x_i \in E$ tal que $T_{x_i} = \lambda_i x_i$ $\forall_i = 1, \ldots, n$ entonces E es una base de V y

$[T]_E$ es diagonal.

Obs.: 1) Los puntos (4), (5) y (6) son equivalentes a (1), (2) y (3) ya que se trata de matrices por lo tanto no es necesario demostrarlos.

2) De las Prop. anteriores se tiene que no toda $T \in Hom(V,V)$ es diagonalizable, pero si toda T es triangularizable.

3) $A \sim B \Longrightarrow B = A^{-1} A P$

$A \sim B \Longrightarrow$ los valores propios de A y B son los mismos

Si A, B son diagonalizables y $A \sim B \Longrightarrow$ los valores propios de A y B son iguales.

Si A y B tienen los mismos valores propios $\Longrightarrow A \sim B$

4) Si A tiene n ve.p. L.I., entonces existe P tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Luego

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Encontremos los ve.p. asociados por lo tanto si

$$P = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

entonces

$$A \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda c_1 & \lambda c_2 \cdots & \lambda c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Luego $A_{c_i} = \lambda_i \; c_i \qquad \forall\; i, \quad 1 \leq i \leq n$

lo que demuestra que los $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los n vectores propios L.I. de A.

(P no singular $\Longleftrightarrow$ $c_1, \ldots, c_n$ son L.I.)

Recíprocamente, si $\{c_1, \ldots, c_n\}$ es L.I. de vectores propios de A y

$$P = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

entonces P es no singular y

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4: Sea $[T]_F = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

entonces A es diagonalizable

En efecto;

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$$f(\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 2$$

Luego los valores propios de A son 1,2.

Encontremos los ve.p. asociados

Para $\lambda = 1$: $\operatorname{Ker}(A - 1I)$? es decir resolver $(A-I)X = 0$

$$\therefore \quad M_{\lambda=1} = \langle (3,-1,3) \rangle$$

Para $\lambda = 2$: $\operatorname{Ker}(A - 2I)$? es decir resolver $(A - 2I)X = 0$

$$\therefore \quad M_{\lambda=2} = \langle (2,1,0), (2,0,1) \rangle$$

Entonces $\dim \mathbb{R}^3 = \dim M_{\lambda=1} + \dim M_{\lambda=2} = 1+2 = 3$

Luego A es diagonalizable;

y la base $E = \{ (2,1,0), (2,0,1), (3,-1,3) \}$

tal que $[T]_E = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz P es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{tal que}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(2,2,1)$$

7.19. EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Hacer las demostraciones pendientes.

2) Son diagonalizable las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -12 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Si en el ejercicio (2) las matrices no son diagonalizable encuentre la matriz que las triangulariza.

4) Para qué valores de a y b es diagonalizable la matriz.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

5) Dar C.N.S. para que A sea similar a una matriz diagonal.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{en } \mathbb{R}_{2\times 2}$$

6) Sea $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & c & a \end{pmatrix}$ ¿Es similar a una matriz diagonal?

INDICE

8. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Ahora deseamos estudiar los espacios vectoriales en los que tiene sentido hablar de "longitud" de un vector y de "ángulo" entre dos vectores.

Primeramente veremos algunos conceptos sobre funcionales lineales y funciones bilineales.

Sean V,W e.v. sobre K entonces sea una función.

$$T : V \longrightarrow W$$

tal que $\quad T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$

$\forall \; v_1, v_2 \in V$ y $\alpha \in K$ entonces:

1) T es una transformación lineal de V en W (t.ℓ.)

2) Si $W = V$: $T : V \longrightarrow V$

T es un operador lineal sobre V (o.ℓ.)

3) Si $W = K$: $\hat{T} : V \longrightarrow K$

T es un funcional lineal sobre V (f.ℓ.)

8.1. ESPACIO DUAL

Sea V un e.v. sobre K. Entonces se define el espacio dual de V por:

$$V^* = T \;/\; T: V \longrightarrow K \;,\; T \text{ es un funcional lineal}$$

8.2. PROP. V^* es un e.v. sobre K con las operaciones + y $\bullet$ usual definidos para Hom(V,W)

Dem.: Se deja de ejercicio.

Ejemplo 1: Sea $V = K_s = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} / \ x_i \in K \right\}$ y

$$a = (a_1, \ldots, a_s) \in K^s$$

entonces

$$f_a : K_s \longrightarrow K$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} \longmapsto (a_1, \ldots\ a_s) \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{array} = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i$$

$f_a \in V^*$ $\quad (V^* = K^{s*})$

Ejemplo 2: Sean $a_1, \ldots, a_n \in K$ y $f \in K^n$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$$

entonces $f \in V^*$

$$f : V = K^n \longrightarrow K$$

Si E , E' son las bases canónicas de K^n y K respectivamente entonces,

$$\left[T \right]_E^{E'} = (a_1, \ldots, a_n)$$

Ejemplo 3: $n \in \mathbb{Z}^+$, $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(k)$ entonces

$T_r : \mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow K$

$A \longmapsto T_r A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$T_r \in V^*$; $T_r A$: Traza de la matriz A

Ejemplo 4: $V = \mathcal{C}[a,b]$

$T : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g \longmapsto T(g) = \int_a^b g(t)\,dt$

$T \in V^*$

Si $\dim V = n$, $\dim W = m \Longrightarrow \dim \mathrm{Hom}(V,W) = \dim V \cdot \dim W$

luego tenemos

8.3. PROP. Sea V un e.v. dobre K , $\dim V = n$. Entonces

$$\dim V^* = \dim V = n$$

Dem. Hecha.

Sabemos que si $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{w_1, \ldots, w_n\} \subset V$ entonces $\exists$ t. ℓ. T de V en W tal que $T(v_j) = w_j$ por lo tanto $\exists$ f_i funcional lineal en V tal que

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} \quad , \quad f_i \in V^* \; ; \; ij = 1, \ldots, n$$

Luego obtenemos de E un conjunto de n f. ℓ. diferentes $f_1, \ldots, f_n$ sobre V que son L.I.

Por lo tanto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es una base V^* llamado base dual de E.

8.4. PROP. Si V es un e.v. sobre, $E=\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V entonces,

1) $\exists$ base dual E^*, $E^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$ de V^* tal que

$$f_i(v_j) = \delta_{ij}$$

2) Para cada f. ℓ., f_1 sobre V se tiene

$$f = \sum_i f(v_i)\, f_i$$

3) Para cada vector $v \in V$ se tiene

$$v = \sum_i f_i\,(v)\, v_i$$

Dem.: (1) hecha, el resto de ejercicio.

Obs.: (1) De (3) se tiene que f_i es la función que asigna a cada vector v la i-ésima coordenada de v respecto de la base E. Por lo tanto f_i también se llaman las funciones coordenadas de V.

8.5. PROP. Si dim V = n $\Longrightarrow$ y $T \in V^*$ entonces

$$\rho(T) = 1 \quad y \quad \eta(T) = n-1$$

8.6. DEF. HIPERPLANO

Sea V un e.v. sobre K, dim V = n y $W \leq V$ con dim W = n-1. Entonces W se llama hiperespacio e hiperplano.

Obs.: Un hiperplano es siempre el espacio nulo de $f \in V^*$.

8.7. DEF. CONJUNTO ANULADOR

Sea V un e.v. sobre K, $S \subset V$. Entonces se define el anulador de S por S^0.

$$S^0 = \{ T \,/\, T \text{ es f.}\ell\text{. sobre V tal que } f(v) = 0 \ \forall_v \in S \}$$

8.8. PROP. Sea V e.v. sobre K, $\dim V = n$. Entonces

1) $S^0 \leqslant V^*$

2) Si $S = \{0\} \Longrightarrow S^0 = V^*$

Si $S = V \Longrightarrow S^0 = \{ f=0 \}$

3) Si $W \leqslant V$

$\dim V = \dim W + \dim W^0$

8.9. DEF. EL DOBLE DUAL

Sea V un e.v. sobre K entonces se define el doble anual de V por $V^{**} = (V^*)^*$

Obs.: (1) Si $\dim V = n \Longrightarrow \dim V^* = n = \dim V^{**}$

(2) $(S^0)^0 = \langle S \rangle$, $S \subset V$

(3) Si $S \subset V^* \Longrightarrow S^0 \subset V^{**}$

8.10. DEF. TRANSPUESTA DE UNA t. ℓ.

Sea $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ entonces se define la transpuesta de T por $T^t = T^*$

$T^* : W^* \longrightarrow V^*$ tal que

$$(T^*(g))(v) = g(T(v)) \qquad \text{con} \quad g \in W^* \ , \ v \in V$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[dr] & W \arrow[d, "g"] \\ & k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W^* \arrow[r, "T^*"] \arrow[dr] & V^* \arrow[d] \\ & k \end{tikzcd}$$

8.11. DEF. MATRIZ TRANSPUESTA

Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(k)$ entonces se define la transpuesta A por $A^t \in \mathcal{M}_{n \times m}(k)$

$$a^t_{ij} = a_{ji}$$

y se tiene que $\rho(A) = \rho(A^t)$

Hasta el momento tenemos

$T: V \longrightarrow W$ t. ℓ.
$T: V \longrightarrow V$ o. ℓ.
$T: V \longrightarrow k$ f. ℓ.

nos interesa ahora.

$$T: V \times W \longrightarrow \mathcal{U} \ ,$$
$$(v,w) \longmapsto T(v,w)$$

tal que T sea lineal en cada variable

Para tal caso debe cumplirse que

$T(v,0)$ es lineal

$T(0,w)$ es lineal

entonces T sería una función bilineal.

Por ejemplo $T: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(v,v) \longmapsto T(u,w)$

$$T(u,v) = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i \quad \text{donde}$$

$u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$

8.12. DEF. FUNCION BILINEAL (f.b.)

Sean V, W, U e.v. sobre K. Entonces una función f

$$f: V \times W \longrightarrow U$$

se llama función bilineal si

(1) $f(v,0) : V \longrightarrow U$ es una t. ℓ. $\forall v \in V$

(2) $f(0,w) : W \longrightarrow U$ es una t. ℓ. $\forall w \in W$

Es decir si,

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha f(v_1,w) + \beta f(v_2,w)$$

y

$$f(v_1 \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha f(v,w_1) + \beta f(v,w_2)$$

$\forall v, v_1, v_2 \in V$, $\forall w, w_1, w_2 \in W$, $\forall \alpha\beta \in K$

8.13. DEF. CONJUNTO DE LAS FUNCIONES BILINEALES

Se define el conjunto, si V,W,U son e.v. sobre K,

$$\mathrm{Hom}(V \times W, U) = \{ f / f: V \times W \longrightarrow U \text{ es f.b.} \}$$

8.14. DEF. FORMA BILIENAL (fo.b)

Sea V e.v. sobre K. Entonces una función bilineal f, se llama forma bilineal si

$$f: V \times W \longrightarrow K$$

8.15. DEF. CONJUNTO DE LAS FORMAS BILINEALES

Si V es un e.v. sobre K, se define

$$L(V \times V, K) = \{ f / f: V \times V \longrightarrow K \text{ es una fo.b.} \}$$

OBS.: (1) $Hom(V \times W, V)$ y $L(V \times V, K)$ son e.v. sobre K.

(2) $0: V \times V \longrightarrow K$ es fo.b.

(3) Si $f, g \in L(V \times V, K) \Longrightarrow \alpha f + g$ es uno fo.b.

(4) $\dim L(V \times V, K) = n^2$

Ejemplo 5: Sean $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $V = \mathcal{M}_{m\times n}$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

entonces

$$f_A : V \times V \longrightarrow K \quad \text{tal que}$$

$$f_A(x,y) = T_r(X^t A Y) \quad \text{es uno fo.b.}$$

En efecto

$$\begin{aligned} f_A(\alpha X + \beta Y, Z) &= T_r\left[(\alpha X + \beta Y)^t A Z \right] \\ &= T_r\left[\alpha X^t AZ + \beta Y^t AZ \right] \\ &= \alpha T_r(X^t AZ) + \beta T_r(Y^t AZ) \end{aligned}$$

$$= \alpha f_A (X,Z) + \beta f_A(Y,Z)$$

$$f_A(X, \alpha Y + \beta Z) \stackrel{?}{=} \alpha f_A(X,Y) + \beta f_A(X,Z)$$

La demostración se deja de memoria.

Ejemplo 6: Sean $f: K^2 \longrightarrow K$

f uno fo.b. sobre K

Si $v_1 = (x, x_2)$, $v_2 = (Y_1, Y_2) \in K^2$

Encuentre $f(v_1, v_2)$ (es decir caracterizar fo.b).

En efecto

$$v_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 \qquad x_1, y_2, y_1, y_2 \in K$$

$$v_2 = y_1 e_1 + x_2 e_2 \qquad E = \{ e_1, e_2 \} \text{ base}$$

$$\therefore \quad f(v_1, v_2) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2, v_2)$$

$$= x_1 f(e_1, v_2) + x_2 f(e_2, v_2)$$

$$= x_1 f(e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2) + x_2 f(e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2)$$

$$= x_1 y_1 f(e_1, e_1) + x_1 y_2 f(e_1, e_2) + x_2 y_1 f(e_1, e_2) + x_2 y_2 f(e_1, e_2)$$

Si $A_{ij} = f(e_i, e_j)$

$$f(v_1, v_2) = x_1 y_1 A_{11} + x_1 Y_2 A_{12} + x_2 y_1 A_{21} + x_2 y_2 A_{22}$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_i A_{ij}$$

Luego f está definida por los cuatro escalares

$$A_{ij} = f(e_i, e_j)$$

$$\therefore \quad f(v_1, v_2) = \sum_{i,j} A_{ij}\, x_i\, y_i$$

pero $X = [v_1]_E$, $Y = [v_2]_E$, $A = (A_{ij}) \in \mathcal{M}_{2x2}$

$$f(v_1, v_2) = X^t A Y$$

En caso $V = \mathbb{R}^2$

$$f(v, w) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

donde $v = (x_1, x_2)$ y $w = (y_1, y_2)$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = v_E \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [w]_E \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad f(v,w) = X^t A Y = [v]_E^t \, [f]_E \, [w]_E$$

luego la matriz A es la asociada a la fo.b.

8.16. <u>DEF. MATRIZ ASOCIADA A UNA fo.b.</u>

Sea V un e.v. sobre K, $\dim V = n$ y $E = \{ v_1, \dots, v_n \}$ base de V. Si f es una forma bilineal sobre V, entonces la matriz de f en la base E (o matriz asociada a f) es la matriz A de nxn tal que

$$A_{ij} = f(v_i, v_j)$$

y se denota por

$$A = [f]_E$$

OBS. Se tiene que $f(v,w) = [v]_E^t \; [f]_E \; [w]_E$

8.17. PROP. Sea $\dim V = n$. Para cada base E de V la función que asocia a cada fo.b. sobre V una matriz en la base E es un isomorfismo.

$$g : L(V \times V_1 K) \longrightarrow \mathcal{M}_{nxn}$$

$$f \longmapsto [f]_E$$

g es isomorfismo y

$$L(V \times V, K) \cong \mathcal{M}_{nxn}$$

Dem. Se deja de ejercicio

8.18. Problema: ¿Qué sucede a la matriz de uno fo.b. si se cambia la base?

¿Cómo se relacionan $[f]_E$ y $[f]_{E'}$?

Solución: Tenemos que

$$f(v,w) = [v]_E^t \; [f]_E \; [w]_E$$

$$[v]_E = P\,[v]_{E'}$$

$$f(v,w) = (P\,[v]_{E'})^t \; [f]_E \quad (P\,[w]_{E'})$$

$$f(v,w) = [v]_{E'}^t \; P^t \; [f]_E \; P\,[w]_{E'} \qquad (8\text{-}1)$$

Pero $\quad f(v,w) = [v]^t_{E'} \ [f]_{E'} \ [w]_{E'}$ (8-2)

$\therefore$ De (8-1) y (8-2) se tiene

$$[f]_{E'} = P^t \ [f]_E \ P$$

<u>Ejemplo 7:</u> Sea $V = \mathbb{R}^2$, E base canónica; $E' = \{(1,-1),(1,1)\}$

y la fo. b. dada por

$$f(v,w) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

Encontrar

(1) $[f]_E$?

Tenemos $f(e_i,e_j) = 1 \quad \forall_{i,j} = 1,2$

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) ¿ $[T]_{E'}$?

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad [f]_E = P^t \ [f]_E \ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(3) $f(v,w) = [x_1 \ x_2] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow f(v,w) =$

además $f(v,w) = [x_1' \ x_2'] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} \Longrightarrow f(v,w) = 4x_2' \, y_2'$

<u>OBS.:</u> De $[f]_{E'} = P^t \ [f]_E \ P$ se tiene

$$B = P^t A P$$

es decir A,B representan la misma fo.b. en distintas bases y

$$\rho(A) = \rho(B)$$

y podemos definir

8.19. DEF. RANGO DE UN fo,b.

Si f es una fo,b entonces se define el rango de f como el rango de su matriz asociada en cualquier base.

$$\rho(f) = \rho(A) = \rho([f]_E)$$

9.20. PROP. Sea f una forma bilineal sobre V, dim V=n entonces son equivalentes.

(1) $\rho(f) = n$

(2) $\forall\ v_1 \in V$ y $v_1 \neq 0$ $\exists\ v_2 \in V$ tal que $f(v_1,v_2) \neq 0$

(3) $\forall\ v_2 \in V$, $v_2 \neq 0$, $\exists\ v_1 \in V$ tal que $f(v_1 v_2) \neq 0$

Dem.: Se deja de ejercicio

8.21. DEF. fo.b. SINGULAR.

(1) Una fo.b. es no singular si cumple con (1) y (2) de la Prop. 8.20.

(2) Si dim V = n entonces f es no singular si cumple con (1) v (2) v (3) de la Prop. 8.20.

(3) f es no singular $\Longleftrightarrow$ su matriz asociada es no singular.

Ejemplo 8: Sea $V = \mathbb{R}^n$ y f tal que

$$f(v,w) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots\ldots + v_n w_n$$

entonces la fo.b. , f es no singular ya que

$$[f]_E = I_{nxn} \quad ; \quad E \text{ base canónica de } \mathbb{R}^n$$

además $f(x,y) = X^t I Y = X^t Y$

Estamos en presencia del producto punto de $\mathbb{R}^n$.

OBS.: No toda fo.b. es diagonalizable.

Problema: ¿Es posible encontrar una base E de V tal que f sea diagonalizable, f un fo.b. sobre V, $[f]_E = \text{diag}\ (\ldots)$?

Respuesta: Si y

$$f \text{ es diagonalizable} \iff f \text{ es simétrica}$$

$$f(v,w) = f(w,v)$$

es decir,

$$f(v,w) = X^t A Y \text{ es diagonalizable} \iff X^t A Y = Y^t A X$$

8.22. DEF. fo.b. SIMETRICA

Sea f una fo.b. sobre el e.v. V. Entonces f es simétrica si,

$$f(v,w) = f(w,v) \qquad \forall\ v,w \in V$$

8.23. DEF. MATRIZ SIMETRICA

Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}(k)$ entonces A se dice simétrica si $A^t = A$ es decir $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall_{i,j}$ donde $A = (a_{ij})$.

OBS.: (1) Si dim $V = n$ entonces f es simétrica ssi $A = [f]_E$ es simétrica.

(2) Si existe una base E de V tal que f está representada por una matriz diagonal. Entonces f es simétrica.

8.24. DEF. FORMA CUADRATICA (f.c.)

Sea f una fo.b. sobre V simétrica, entonces la forma cuadrática asociada a f es la función q,

$$q : V \longrightarrow K$$

tal que $q(v) = f(v,v)$

OBS.: Si $K = \mathbb{C}$ entonces f una fo.b. está determinada por una forma cuadrática de acuerdo a la identidad de polarización.

$$f(v,w) = \frac{1}{4} q(v+w) - \frac{1}{4} q(v-w)$$

Ejemplo 9:

(1) Sea $V = \mathbb{R}^n$ y f el producto escalar real entonces $q(v) = f(v,v) = v_1^2 + v_2^2 + \ldots\ldots + v_n^2$

$\therefore$ $f(v,v) > 0$ si $v \neq 0$

(2) $f_A(x,y) = X^t A Y$

$\therefore$ $q_A(x) = X^t A X$

8.25. DEF. fo.b. DEFINIDA POSITIVA

Sea f una fo.b. sobre V. Entonces

(1) Si $f(v,v) > 0$, f se llama positivamente definida sobre V (f.d.p.)

(2) Si $f(v,v) < 0$, f se llama negativamente definida (f.d.n.)

(3) Si $f(v,v) > 0$ pero existe $v \neq 0$ que anula a f entonces f se llama semidefinida positiva.

(4) Si $f(v,v) < 0$ pero existe $v \neq 0$ que anula a f entonces f se llama semidefinida negativa.

8.26. PROP. Sea V un e.v. sobre K, $\dim V = n$ y f una fo.b. simétrica sobre V. Entonces

$$\exists\ E \text{ base de } V \text{ tal que } [f]_E \text{ es diagonal}$$

Dem.: Se deja de ejercicio.

8.27. PROP. Si $k = \mathbb{C}$ y $A \in \mathcal{M}_{nxn}$ es simétrica sobre K. Entonces $\exists$ P, $P \in \mathcal{M}_{nxn}$ invertible sobre K tal que $P^t A P$ es diagonal

Dem. Se deja de ejercicio.

OBS.: (1) Si $K = \mathbb{R}$ entonces $\exists$ P, $P \in \mathcal{M}_{nxn}$ ortogonal tal que $P^t A P$ es diagonal.

(2) $P \in \mathcal{M}_{nxn}$ se dice ORTOGONAL si $P^t = P^{-1}$

Ejemplo:10: Sea f una f.b. cuya matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces f es definida positiva

En efecto: Primeramente encontramos los valores propios de A.

$$f(\lambda) = \det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 10\lambda + 10$$

$$f(\lambda) = 0 \implies \lambda = 1\ ,\ \lambda = 2 \quad (\text{multip. } 2)$$

Entonces $\dim V = 3$ y existen 3 valores propios positivos. Luego f es definida positiva.

OBS.: Si r = Nº de valores propios $\neq 0$
s = Nº de valores propios > 0
n = dim V

Entonces:

(1) Si $r = s = n \implies$ f es f.d.p.

(2) Si $r = s < n \implies$ f es f.d.s.p.

(3) Si $r = n \wedge s = 0 \implies$ f es f.d.n.

(4) Si $r < n \wedge s = 0 \implies$ f es f.d.s.n.

8.28. DEF. fo.b. ANTISIMETRICA

Sea f una fo.b. sobre el e.v. V y $K = \mathbb{C}$ entonces f se dice antisimétrica si

$$f(v.w) = -f(w,v) \qquad \forall\, v,w \in V$$

8.29. DEF. MATRIZ ANTISIMETRICA

Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}$ entonces A es antisimétrica ssi $A^t = -A$

OBS.: (1) Si $\dim V = n$ y f una fo.b. sobre V. Entonces f es antisimétrica ssi $[f]_E$ es antisimétrica.

(2) Si f es antisimétrica entonces $[f]_E$ $\forall E$ tiene $a_{ii} = 0 \quad \forall_i$

(3) Si f es una fo.b. sobre V y si

$$g(v,w) = \frac{1}{2}\left[f(v,w) + f(w,v)\right]$$

$$h(v,w) = \frac{1}{2}\left[f(v,w) - f(w,v)\right]$$

Se tiene que;

$$f = g + h \quad \text{en forma única}$$

y g es fo.b. simétrica, h es fo.b. antisimétrica.

Ahora que hemos entregado algunos conceptos sobre espacio dual y transformaciones bilineales, pasamos a los productos internos y los espacios con productos internos y las funciones definidas en ellos.

8.30. DEF. PRODUCTO INTERNO (p.i.)

Sea V un e.v. sobre K y una función $(\setminus)$

$$(\setminus) : V \times V \longrightarrow K$$

entonces la función se dice producto interno si;

(1) $(\alpha v_1 + \beta v_2 \setminus v_3) = \alpha (v_1 \setminus v_3) + \beta (v_2 \setminus v_3) \quad \forall v_1 v_2 v_3 \in V; \alpha, \beta, \in K$

(2) $(v_1 \setminus v_2) \geqslant 0 \qquad \forall v_1 \in V$

(3) $(v_1 \backslash v_2) = \overline{(v_2 \backslash v_1)} \qquad \forall v_1, v_2 \in V$

8.31. DEF. ESPACIO PRODUCTO INTERNO (e.p.i.)

Sea V un e.v. sobre K , en el que se ha definido un producto interno. Entonces V se llama espacio vectorial con producto interno y se denota por:

$$(V, \mathbb{K}, (\backslash))$$

(2) Si $K = \mathbb{R}$ entonces $(V, \mathbb{R}, (\backslash))$ se llama espacio euclidiano.

(3) Si $K = \mathbb{C}$ entonces $(V, \mathbb{C}, (\backslash))$ se llama espacio unitario.

OBS.: (1) La definición de p.i. se puede dar de la siguiente forma:

a) $(u + v \backslash W) = (u \backslash w) + (v \backslash W) \qquad \forall u, v, w \in V$

b) $(\alpha u \backslash w) = \alpha (u \backslash w) \qquad \forall u, w \in V, \alpha \in V$

c) $(u \backslash v) = \overline{(v \backslash u)} \qquad \forall u, v \in V$

d) $(u \backslash u) \geqslant 0 \qquad \forall u \in V$

(2) Si $K = \mathbb{R}$ entonces (3) de la Def. 8.30. implica que $(\backslash)$ es simétrica.

Ejemplo 11: Sea el producto interno definido por

$$(u \backslash v) = \sum_{j=i}^{n} x_j \overline{y_j}$$

llamado producto interno canónico.

Si $K = \mathbb{R}$ entonces

$$(u \backslash v) = \sum_{j=1}^{n} x_j x_j = \sum_j x_j^2$$

llamado producto escalar

$$V = \mathbb{R}^n \quad y \quad u = (x_1, \ldots, x_n)$$
$$v = (y_1, \ldots, y_n)$$

Ejemplo 12: Si $V = \mathcal{C}[0,1]$

entonces $(f \backslash g) = \int_0^1 f(t)\, \overline{g(t)}dt$

Ejemplo 13: Sea $V = R^2$

$$u = (x_1, x_2) \quad y \quad v = (y_1, y_2)$$

entonces

$$(u \backslash v) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$$

es un producto interno.

8.32. DEF. NORMA

Sea $(V,K,(\backslash))$ un e.p.i. Entonces se define la norma de v, $v \in V$ por

$$\|v\| = \sqrt{(v \backslash v)}$$

8.33. PROP. Sea $(V,K,(\backslash))$ un e.p.i. Entonces si $v,w \in V$, $\alpha \in K$ se tiene:

1) $\|\alpha v\| = |\alpha| \; \|v\|$

2) $\|v\| > 0 \quad ; \quad v \neq 0$
$\|v\| = 0$ ssi $v = 0$

3) $|(v \quad w)| \leq \|v\| \, \|w\|$. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. Desigualdad triangular

Dem.: (1) y (2) se dejan de ejercicio

(3) Si $v = 0$ es inmediato

Sea $v \neq 0$ y definamos u por $u = w - \frac{(w \setminus v)}{\|v\|^2} v$

Sabemos que $0 \leq \|u\|^2$

$$\therefore \quad 0 \leq \|u\|^2 = (u \setminus u)$$

$$= \left(w - \frac{(w \setminus v)}{\|v\|^2} v \setminus w - \frac{(w \setminus v)}{\|v\|^2} v\right)$$

$$= (w \setminus w) - \frac{(w \setminus v)\ (v \setminus w)}{\|v\|^2}$$

$$= \|w\|^2 - \frac{(v \setminus w)\ (v \setminus w)}{\|v\|^2}$$

$$= \|w\|^2 - \frac{|(v \setminus w)|^2}{\|v\|^2}$$

$$\therefore \quad |(v \setminus w)| \leq \|v\| \, \|w\|$$

(4) $\|v + w\|^2 = (v+w \setminus v + w)$

$$= \|v\|^2 + \overline{(v \setminus w)} + (v \setminus w) + \|w\|^2$$

$$= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(v \setminus w) + \|w\|^2$$

$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\| \, \|w\| + \|w\|^2$$

$$= (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\therefore \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

OBS.: De la Prop. anterior podemos observar que,

(1) Si $w = \frac{(w \backslash v)}{\|v\|^2} v \Longrightarrow$ v, w son L.D. es decir $v \parallel w$

(2) $\left| \frac{(v \quad w)}{v \quad w} \right| \leqslant 1 \qquad \forall\, v, w \in V,\ v, w \neq 0$

en $\mathbb{R}^2$ tenemos;

$$\frac{(v \backslash w)}{\|v\| \, \|w\|} = \cos \theta \quad , \quad \theta = \sphericalangle\, v, w$$

y podemos definir

8.34. DEF. ANGULO ENTRE VECTORES

Si $(V, K, (\backslash))$ es un e.p.i. entonces se define el ángulo entre v y $w \in V$ por

$$\cos \theta = \frac{(v \backslash w)}{\|v\| \|w\|}$$

8.35. DEF. DISTANCIA ENTRE VECTORES

Sea $(V, K, (\backslash))$ un e.p.i. entonces se define la distancia entre u, $v \in V$ por

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

OBS.: En el caso de $\mathbb{R}^2$ tenemos

1) $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

2) Si $\sphericalangle\, x, y = \theta \Longrightarrow \|x\| \|y\| \cos \theta = X \cdot Y$

8.37. DEF. CONJUNTO ORTOGONAL

Sea $(V,K,(\backslash))$ un e.p.i. entonces:

(1) Se dice que v es ortogonal con w ssi $(v \backslash w) = 0$

(2) u y v son ortogonales ssi son ortogonales y

$$\|u\| = \|v\| = 1$$

(3) $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ se dice ortogonal ssi

$$(v_i \backslash v_j) = 0 \quad \forall_{i,j} \ , \ i \neq j$$

(4) $S = \{v_1, \ldots\ldots, v_n\}$ se dice ortogonal ssi S es ortogonal y

$$\|v_i\| = 1 \quad \forall_i$$

Ejemplo 16: 1) En $\mathbb{R}^n$ la base canónica es ortogonal y ortonormal.

2) Los vectores del ejemplo 15 son ortogonales

3) (x,y), $(-y,x) \in \mathbb{R}^2$ son ortogonales con el p.i. canónico.

4) Si $f_n(x) = \sqrt{2}\, \cos 2\pi n x$

$$g_n(x) = \sqrt{2}\ \operatorname{sen}\ 2\pi n x$$

entonces el conjunto

$\{1, f_1, g_1, f_2, \ldots\ldots\}$ es ortonormal en $[0,1]$ con el p.i. $(f \backslash g) = \int_0^1 f g$

8.38. PROP. Sea $(V,K,(\backslash))$ un e.p.i. Entonces si $0 \notin V$ y $S \subset V$ es ortogonal $\Longrightarrow$ S es L.I.

8.36. PROP. La distancia entre los vectores u y $v \in V$ cumple con

(1) $d(u,u) \geqslant 0$
y $d(u,v) = 0$ ssi $u = v$

(2) $d(u,v) = d(v,u)$

(3) $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$

Dem.: Se deja de ejercicio

Ejemplo 14: Sea $\mathbb{R}^3$ con el p.i. canónica y $v,w \in \mathbb{R}^3$

$v=(1,1,1)$, $w = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$. Entonces

$$d(u,v) = \|u-v\| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3/2}} = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 15: Sea $V = \mathcal{C}[0,1]$ con el p.i.

$$(f\backslash g) = \int_0^1 fg$$

Si $f = \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}$ y $g = \cos(\frac{\pi x}{2})$. Entonces

$$d(u,v) = \sqrt{\int_0^1 (\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} - \cos\frac{\pi x}{2})^2} = \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}}$$

$$\cos\theta = \frac{\int_0^1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\cos\frac{\pi}{2}x}{\|\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\|\,\|\cos\frac{\pi}{2}x\|} = \frac{2}{\pi}$$

Dem.: Sea $S = \{ v_1, \ldots, v_n \}$ ortogonal

p.α. $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall_i$

Sea $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$; $w \in S$

$(w \setminus v_j) = (\sum \alpha_i v_i \setminus v_j)$ $\qquad v_j \in S$

$= \sum \alpha_i (v_i \setminus v_j)$

$= \alpha_j (v_j \setminus v_j)$

$\therefore \alpha_j = \dfrac{(w \setminus v_i)}{\|v_j\|^2} \Longrightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall_j$

$\therefore$ S es L.I.

OBS.: (1) Si $\dim V = n$ y $S \subset V$ en $v_i \in S$, $v_i \neq 0$ entonces si S es ortogonal $\Longrightarrow \# S \leq \dim V$

(2) Si w ws c.ℓ. de los $v_i \in S$ entonces

$$w = \sum_{i=1}^{n} \frac{(w \setminus v_i)}{\|v_i\|^2} v_i$$

8.39. PROP. Sea $(V, K, (\setminus))$ un e.p.i. y $F = \{ Y_1, \ldots, Y_n \}$ L.I. Entonces se puede construir.

$E = \{ X_1, \ldots, X_n \}$ ortogonal en V tal que

$\{ X_1, \ldots, X_r \}$ sea una base del subespacio generado por

$\{ Y_1, \ldots, Y_r \} \qquad \forall_r = 1, 2, \ldots, n$

Dem.: Los vectores X_i se obtendrán por medio de una constancción conocida como Proceso de ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMITD.

Primero sea $X_1 = Y_1$

Los otros vectores están entonces dados inductivamente de la siguiente forma:

Supongamos que;

$X_1, \ldots, X_m$; $1 \leq m \leq n$ hayan sido elegidos de modo que para cada X_r.

$\{X_1, \ldots, X_r\}$; $1 \leq r \leq m$

es una base ortogonal para el subespacio de V que es generado por $\{Y_1, \ldots, Y_r\}$

Para construir el vector X_{m+1} sea

$$X_{m+1} = Y_{m+1} - \sum_{r=1}^{m} \frac{(Y_{m+1} \setminus X_r)}{\|X_r\|^2} X_r \qquad (8-7)$$

Entonces $X_{m+1} \neq 0$

y si $1 \leq j \leq m$ entonces

$$(X_{m+1} \setminus X_j) = (Y_{m+1} \setminus X_j) - \sum_{r=1}^{m} \frac{(Y_{m+1} \setminus X_r)}{\|X_r\|^2} (X_r \setminus X_j)$$

$$= (Y_{m+1} \setminus X_j) - (Y_{m+1} \setminus X_j)$$

$$= 0$$

Por lo tanto $\{X_1, \ldots, X_{m+1}\}$ es un conjunto ortogonal que consta de m+1 vector no nulos en el $\langle Y_1, \ldots, Y_{m+1} \rangle$

$\therefore \quad \{ X_1, \ldots, X_{m+1} \}$ es una base de este subespacio

OBS.: De (8-7) se construyen los vectores ortogonales, así:

$$X_1 = Y_1$$

$$X_2 = Y_2 - \frac{(Y_2 \backslash X_1)}{\|X_1\|^2} X_1$$

$$X_3 = Y_3 - \frac{(Y_3 \backslash X_1)}{\|X_1\|} X_1 - \frac{(Y_3 \backslash X_2)}{\|X_2\|^2} X_2$$

$$X_4 = X_4 - \frac{(Y_4 \backslash X_1)}{\|X_1\|^2} X_1 - \frac{(Y_4 \backslash X_2)}{\|X_2\|} X_2 \frac{(Y_4 \backslash X_3)}{\|X_3\|^2} X_3$$

8.40. PROP. Sea $(V, K, (\backslash))$ un e.p.i. y $\dim V = n$ entonces.

1) V tiene una base ortogonal

2) V tiene una base ortonormal

Dem.: Sea $E = \{ v_1, \ldots, v_n \}$ base de V entonces mediante el proceso de Gram-Schmidt se construye $F = \{ w_1, \ldots, w_m \}$ base ortonormal de V.

Y haciendo $u_i = \frac{w_i}{\|w_i\|} \quad \forall_i$ obtenemos

$G = \{ u_1, \ldots, u_n \}$ base ortonormal de V.

OBS.: El proceso de Gram-Schmidt puede usarse para determinar la independencia lineal de un conjunto de vectores. Ocupando (8-7).

Ejemplo 17: Sean $Y_1 = (3,0,4)$, $Y_2 = (-1,0,7)$, $Y_3 = (2,9,11)$

en $\mathbb{R}^3$ con el p.i. canónico.

(1) Encontremos una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

$$X_1 = (3,0,4)$$

$$X_2 = (-1,0,7) - \frac{(-1,0,7)\cdot(3,0,4)}{25}(3,\ 0,\ 4)$$

$$= (-4,0,3)$$

$$X_3 = (2,9,11) - \frac{50}{25}(3,0,4) - \frac{25}{25}(-4,0,3)$$

$$= (0,\ 9,\ 0)$$

$$\therefore\quad E' = \{(3,\ 0,\ 4),\ (-4,0,3),\ (0,9,0)\}$$

(2) Encontremos una base ortonormal de V.

$$F = \left\{ \frac{(3,0,4)}{\sqrt{25}},\ \frac{(-4,0,3)}{\sqrt{25}},\ \frac{(0,9,0)}{\sqrt{81}} \right\}$$

$$F = \left\{ \left(\frac{3}{5},\ 0,\ \frac{4}{5}\right),\ \left(-\frac{4}{5},\ 0,\ \frac{3}{5}\right)\ (0,1,0) \right\}$$

(3) Expresar (1,2,3) como c. . de la base E'. En general sea $(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$ entonces ocupamos (8-9) y tenemos:

$$(v_1,v_2,v_3) = \frac{3v_1 + 4v_3}{25}\ X_1 + \frac{-4v_1 + 3v_3}{25} X_2 + \frac{v_2}{9}\ v_3$$

$$\therefore\quad (1,2,3) = \frac{3}{5}(3,0,4) + \frac{1}{5}(-4,0,3) + \frac{2}{9}(0,9,0)$$

OBS.: El proceso de Gram-Schmidt consiste en la aplicación repetida de una operación geométrica básica llamada proyección ortogonal. El método de la proyección ortogonal también aparece en forma natural en la solución de un importante problema de aproximación.

Supóngase que $W \leq V$ e.p.i. y sea $x \in V$ arbitrario. El problema consiste en hallar una mejor aproximación posible a x por los vectores de W. Es decir se desea encontrar un vector $y \in W$ tal que $\|x-y\|$ sea lo más pequeña posible.

8.41. DEF. MEJOR APROXIMACION (M.A.)

Sean V un e.p.i. y $W \leq V$. Entonces una mejor a $X \in V$ por vectores de W, es un vector $x \in W$ tal que;

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| \qquad \forall Z \in W$$

OBS.: En el caso $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ se ve que una M.A. a x por vectores de W es un $Y \in W$ tal que;

$(x-y) \perp W$; y debe ser único

8.42. PROP. Sea V un e.p.i. y $W \leq V$, $x \in V$. Entonces;

(1) $Y \in W$ es una M.A. a x $\Longrightarrow$ x-y es ortogonal a todo Z, $Z \in W$

(2) Si existe una M.A. a x entonces es única.

(3) Si $\dim W = M$ y $F = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base ortonormal de W, entonces;

$$Y = \sum_r \frac{(x \setminus w_r)}{\|w_r\|^2} w_r$$

es la única M.A. a x por vectores de W.

Dem.: Se deja de ejercicio.

8.43. DEF. COMPLEMENTO ORTOGONAL (c.o.)

Sea V un e.p.i. Y $S \subset V$. Entonces el complemento ortogonal de S es:

$$S^{\perp} = \{ v \in V \ / \ v \text{ es ortogonal a } Y, \quad \forall y \in S \}$$

OBS.: (1) $V^{\perp} = \{0\}$

$\{0\}^{\perp} = V$

(2) Si y es M.A. a x entonces $(x-y) \in W^{\perp}$

8.44. PROP: Sea V un e.p.i., $S \subset V$. Entonces

$$S^{\perp} \leqslant V$$

Dem.: Se deja de ejercicio.

8.45. DEF. PROYECCION ORTOGONAL (p.o.)

1) Sea V un e.p.i. y $W \leqslant V$. Entonces si existe y una M.A. a x entonces y se llama proyección ortogonal de x sobre W.

2) Si todo vector de V tiene proyección ortogonal sobre W, la aplicación que asigna a cada vector de V su proyección ortogonal sobre w, se llama proyección ortogonal de V sobre W.

8.46. PROP. Sea V un e.p.i., $W \leqslant V$, $\dim W = m$ y

ϕ la proyección ortogonal de V sobre W. Entonces la aplicación ψ.

$$\psi : \begin{array}{l} V \longrightarrow \\ x \longmapsto x - \phi x \end{array}$$

es la proyección ortogonal de V sobre $W^{\perp}$

Dem.: Sea $x \in V$ arbitrario. Entonces

$$x - \phi x \in W$$

y para $Z \in W^{\perp}$ se tiene

$$x - Z = \phi x + (x - \phi x - z)$$

como $\phi x \in W$ y $(x - \phi x - Z) \in W^{\perp}$

se tiene

$$\| x - z \|^2 = \| \phi x \|^2 + \| x - \phi x - z \|^2$$

$$\geqslant \| x - (x - \phi x) \|^2$$

$\therefore$ $x - \phi x$ es la M.A. a x para vectores de $W^{\perp}$

8.48. PROP. Sea V un e.p.i. y $W \leqslant V$ con dim W = m y ϕ la proyección ortogonal de V sobre W.

Entonces;

(1) ϕ es una t. ℓ. idempotente de V en W

(2) $W^{\perp}$ es el espacio nulo de ϕ

(3) $V = W \oplus W^{\perp}$

Dem. Se deja de ejercicio.

OBS.: Si $T^2 = T$; T es idempotente

8.49. PROP. Bajo las condiciones de la Prop. 8.48.

Se tiene que $I - \phi$ es la proyección ortogonal de V en $W^{\perp}$ Y además $I - \phi$ es una t. ℓ. idempotente de V en $W^{\perp}$ con espacio nulo igual a W.

Dem.: Se deja de ejercicio.

El proceso de Gram-Schmidt nos permite estudiar las formas lineales sobre un e.p.i. y en particular aquellas que preservan las estructuras geométricas del e.p.i.V.

En efecto:

Sea V un e.p.i. y $x \in V$ entonces definimos:

f_x por

$$f_x : V \longrightarrow K$$

$$f_x(v) = (v \setminus x)$$

entonces $f_x \in V^*$

8.50. PROP. (Teorema de Riesz)

Sea V un e.p.i. con $\dim V = n$. Entonces

$\forall f \in V^* \quad \exists x \in V$ tal que $f = f_x$

Dem.: $\dim V = n \Longrightarrow \exists E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V.

Sea $f \in V^*$ y $x = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(v_i)} \; v_i$

entonces;

$$f_x(v_j) = (v_j \backslash x)$$

$$= (v_j \backslash \sum_{i=1}^{n} \overline{f(v_i)} v_i)$$

$$= \sum_i f(v_i)(v_j \backslash v_i)$$

$$= f(v_j)$$

$$\therefore \; f_x = f$$

8.51. PROP. (Adjunta de uno t.ℓ.)

Sea V un e.p.i. en $\dim V = n$ y $T \in \mathrm{Hom}(V.V)$.

Entonces $\exists! \; T^* \in \mathrm{Hom}(V,V)$ tal que

$$(T v \backslash w) = (v \backslash T^* w) \qquad \forall \; v, w \in V$$

Llamamos a T^* la adjunta de T.

Dem.: Fijemos $w \in V$ y consideremos la función que;

$v \longmapsto (T v \backslash w)$. Esta función es un elemento de V^* y por el Teorema de Riesz $\exists \; x \in V$ tal que;

$$f_x(v) = (v \backslash x) = (T v \backslash w) \qquad \forall \; v \in V$$

Definamos: $T^*(w) = x$

y tenemos $(T v \backslash w) = (v \backslash T^* w) \qquad \forall \; v; \; w \in V$

La unicidad es inmediata y la linealidad de T^* se dejan de ejercicio.

8.52. Sea V un e.p.i. con dim V = n. Entonces:

1) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

2) $(\alpha T_1)^* = \overline{\alpha} T^*$

3) $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$

Dem.: (2) $(v \backslash (\alpha T)^* w) = ((\alpha T v \backslash w)$

$$= \alpha (T v \backslash w)$$

$$= \alpha (v \backslash T^* w)$$

$$= (v \backslash \overline{\alpha} T^* w)$$

$\therefore (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$

(1) y (3) se dejan de ejercicio.

8.53. <u>PROP.</u> (Matriz Transpuesta Conjugada)

Sea V un e.p.i., dim V = n , $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V y $T \in Hom(V,V)$ con $[T]_E = A = (a_{ij})$.

Entonces;

$$[T^*]_E = A^*$$

donde $A^* = (\overline{a_{ij}})^t$ la transpuesta conjugada.

<u>Dem.:</u> Tenemos $T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$

Y supongamos $T^*(v_j) = \sum_i \beta_{ij} v_i$

Entonces:

$$(T v_j \backslash v_r) = (\sum_i a_{ij} v_i \backslash v_r)$$

$$= \sum_i a_{ij} (v_i \backslash v_r)$$

$$= a_{rj}$$

Pero $(T v_j \backslash v_r) = (v_j \backslash T^* v_r)$

$$= (v_j \backslash \sum_{\ell=1}^{n} \beta_{r\ell} v \ell)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \overline{\beta}_{r\ell} (v_j \backslash v_i)$$

$$= \beta_{jr}$$

$$\therefore A^* = (\overline{a_{ij}})^t$$

8.54. DEF. o. ℓ. ORTOGONAL Y UNITARIO

Sea V un e.p.i. Entonces $T \in Hom(V,V)$ tal que;
$(T_v \backslash T_w) = (v \backslash w) \quad \forall\, v, w \in V$ se llama:

1) Ortogonal si $K = \mathbb{R}$

2) Unitario si $K = \mathbb{C}$

OBS.: Usaremos unitario en ambos casos.

8.55. PROP. Sea V un e.p.i. Entonces;

1) El conjunto de los o. ℓ. unitarios forman un subgrupo del grupo lineal general.

2) T es unitario $\Longleftrightarrow$ $T^{*} = T^{-1}$

Dem.: Se deja de ejercicio.

8.56. PROP. Sea V un e.p.i. con $\dim V = n$ y,

$E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V. Sea $T \in \mathrm{Hom}(V,V)$ Entonces:

T es unitario $\Longleftrightarrow$ $F = \{T v_1, \ldots, T v_n\}$ es base ortonormal de V.

Dem.: ($\Longrightarrow$) p.d. que F es base ortonormal de V.

$$(T v_i \setminus T v_j) = (v_i \setminus v_j) = \delta_{ij}$$

$\therefore$ $F = \{T v_1, \ldots, T v_n\}$ es ortogonal

Entonces F es L.I. por lo tanto F es base de V.

($\Longleftarrow$) Se deja de ejercicio.

Ahora queremos mostrar que todo operador unitario T tiene una matriz muy simple (por ejemplo una diagonal) con respecto a alguna base ortonormal. De hecho, esto se puede establecer para una clase más amplia de operadores.

8.57. DEF. o.ℓ. NORMAL

Sea V un e.p.i. y $T \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Entonces diremos que T es normal si,

$$T^{*} T = T T^{*}$$

OBS.: (1) Los operadores unitarios son normales

(2) Si $T \in Hom(V,V)$ tal que $T = T^*$ entonces T es normal.

8.58. DEF. o.ℓ. Simétricos, Hermitiano (autoadjunto).

Sea V un e.p.i. y $T \in Hom(V,V)$. Entonces si $T = T^*$ se llama:

(1) Simétrico si $K = \mathbb{R}$

(2) Hermitiano si $K = \mathbb{C}$

Usaremos el término autoadjunto en ambos casos.

8.59. PROP. Sea V un e.p.i. y $T \in Hom(V,V)$ autoadjunto. Entonces todos los valores propios de T son reales.

(2) Si v y w son vectores propios de T correspondientes a valores propios diferentes entonces:

$$v \perp w$$

Dem.: (1) Supongamos $T v = \lambda v$, $v \neq 0$

$$\therefore \quad (v \backslash v) = (\lambda v \backslash v)$$
$$= (T v \backslash v)$$
$$= (v \backslash T^* v)$$
$$= (v \quad T v)$$
$$= (v \backslash \lambda v)$$
$$= \bar{\lambda} (v \backslash v)$$

$$\therefore \lambda = \bar{\lambda} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

(2) Se deja de ejercicio.

8.60. PROP. Sea V un e.p.i. y $T \in Hom(V,V)$ normal. Entonces si $v \in V$, K, se tiene que v es vector propio de T correspondiente al valor propio $\Longleftrightarrow$ v es un vector propio de T^* correspondiente al valor propio de .

Dem.: Se deja d eejercicio.

OBS.: Notar que $T - \alpha I$, es un operador normal.

8.61. PROP. Sea V un e.p.i. con $\dim V = n$ y $T \in Hom(V,V)$. E una base ortonormal de V tal que $[T]_E$ es triangular. Entonces,

$$T \text{ es normal } \Longleftrightarrow [T]_E \text{ es diagonal}$$

Dem.: Se deja de ejercicio

8.62. PROP. Sea V un e.p.i. con $\dim V = n$, $T \in Hom(V,V)$ normal, tal que todos sus valores propios están en K. Entonces existe E base ortonormal de V tal que $[T]_E$ es triangular.

Dem.: Se deja de ejercicio

8.63. PROP. (Matriz Unitaria)

Sea $A \in \mathcal{M}_{nxn}(k)$ tal que todos sus valores propios están en K. Entonces existe una matriz unitaria tal que,

$$U^* A U \text{ es triangular}$$

Diremos que U es unitaria si $U^{*} = U^{-1}$

Dem.: Se deja de ejercicio

8.64. (Teorema Espectral para o. ℓ. Normales)

Sea V un e.p.i. con dim V = n, $T \in \text{Hom}(V,V)$. Entonces si T es normal y todos sus valores propios están en K tenemos que existe una base ortonormal E de V tal que,

$[T]_E$ es diagonal

Dem.: Se sigue de las Prop. 8.62, 8.63.

8.65. PROP. Si $A \in \mathcal{M}_{nxn}(k)$ es normal y tiene todos sus valores propios en K.
Entonces existe $P \in \mathcal{M}_{nxn}$ unitaria tal que $P^{-1} A P$ es diagonal

Dem.: Se deja de ejercicio

Ejemplo: Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}_{3x3}$$

Tenemos que:

(1) $A^t = A$ y A es auto adjunta

(2) Luego todos sus valores propios están en $\mathbb{R}$.

(3) Los vectores propios de A son ortogonales.

(4) A tiene 3 vectores propios L.I.

$\therefore$ buscamos una matriz, P ortogonal tal que $P^{-1} A P$ sea diagonal.

Encontremos primeramente los valores propios de A.

$f(\lambda) = (\lambda - 6)(3 - \lambda^2)$

$f(\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = 6$

$\lambda_2 = \sqrt{3}$

$\lambda_3 = -\sqrt{3}$

$\therefore \lambda_i \in \mathbb{R}$ y son todos diferentes

Por el capítulo 7 sabemos que A es diagonalizable.

Para $\lambda_1 = 6 \implies M_{\lambda_1} = \langle(1,1,1)\rangle$

$\lambda_2 = \sqrt{3} \implies M_{\lambda_2} = \langle(-2 + \sqrt{3}, 1, 1 - \sqrt{3})\rangle$

$_3 = -\sqrt{3} \implies M_{\lambda_3} = \langle(-2 - \sqrt{3}, 1, 1 + \sqrt{3})\rangle$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}(-2+\sqrt{3}, 1, 1-\sqrt{3})$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}(-2-\sqrt{3}, 1, 1+\sqrt{3})$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & (-2+\sqrt{3}) & (-2+\sqrt{3})/ \\ 1/\sqrt{3} & 1/ & 1/ \\ 1/\sqrt{3} & (1-\sqrt{3})/ & (1+\sqrt{3})/ \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

8.66. EJERCICIOS PROPUESTOS.

(1) Hacer las demostraciones y ejercicios pendientes.

(2) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{R}^3$ con el p.i. canónico.

$$\{(1,0,1),\ (1,0,-1),\ (0,3,4)\}$$

(3) Sea $V = \{P(x) /\ \text{grad } P(x) \leq 2\}$ con el p.i.

$$(f/g) = \int_0^1 fg$$

Encuentre una base ortonormal de la base canónica de V.

(4) Pruebe que T es ortogonal $\Longleftrightarrow$ preserva la norma

(5) Sea $(V, K, (\ \backslash\ ))$ e.p.i. Para cada par $x, y \in V$ se define

$$x \cdot y = 2(x \backslash y)$$

demuestre x y define un p.i. en V.

(6) Son p.i. en $\mathbb{R}^2$ lo siguiente?

a) $(X \backslash Y) = X_1 Y_1$

b) $(X \backslash Y) = X_1 Y_2 + X_2 Y_1)$

c) $(X \backslash Y) = 2(X_1 Y_1 + X_2 Y_2)$

9. APLICACIONES

En la introducción se expresa la importancia que tenía el estudio del algebra lineal.

Las diferentes ciencias utilizan los conceptos o herramientas que se apoyan en el algebra lineal.

Veremos algunas aplicaciones sin profundizar ni presentar el marco teórico correspondiente ya que escapa al propósito del apunte. Estos se verán en las diferentes ramas como son por ejemplo la Investigación Operacional, Análsis, etc.

A. Cálculo:

Sea $T = D$ tal que

$$D: \mathcal{C}^n[I] \longrightarrow \mathcal{C}^n[I]$$
$$f \longmapsto f'$$

entonces D es una t. ℓ.

Sea T tal que

$$T: \mathcal{C}[I] \longrightarrow \mathcal{C}[I]$$
$$f \longmapsto \int_a^x f \qquad ; \quad x \in I$$

T es una t. ℓ.

B. Sistema de Ecuaciones Lineales:

El sistema $Ax = B$ donde

$A \in \mathcal{M}_{nxm}(k)$, $X \in \mathcal{M}_{mx1}(k)$, $B \in \mathcal{M}_{nx1}(k)$

se resuelve haciendo uso de la ecuación de operadores

$Tx = Y$

Esto se trató en el Capítulo 6.

C. Operadores Diferenciales Lineales.

9.1. <u>DEF. OPERADOR DIFERENCIAL</u>

Una t. ℓ. , L. tal que

$$L: \mathcal{C}^{n}(I) \longrightarrow \mathcal{C}(I)$$

es un operador diferencial lineal de orden n sobre el intervalo I si puede expresarse en la forma

$$L = a_n(x)\,D^n + \ldots\ldots + a_1(x)\,D + a_o(x)$$

donde los coeficientes $a_i(x)$ son contínuos en I.

(2) Y se tiene que la imagen de f en $\mathcal{C}^n(I)$ es:

$$\left[L\cdot(f)\right](x) = a_n D^n f(x) + \ldots + a_1(x)\,D f + a_o(x)\,f$$

<u>Ejemplo 1:</u> $X D^2 + 3\sqrt{x}\,D - 1$

es un o.d.ℓ. de orden 2 en $[0,\infty]$

D. Ecuaciones Diferenciales Lineales.

9.2. DEF. ECUACION DIFERENCIAL

Una ecuación diferencial lineal de orden n en un intervalo I es, por definición, una ecuación con operadores de la forma

$$L_y = h(x)$$

donde h es contínua en I y L es un o.d. ℓ. de orden n en I.

(2) Si h es identicamente cero en I, entonces se tiene la ecuación homogénea

$$L_y = 0$$

(3) Si el coeficiente principal de L no se anula en I, entonces se llama ecuación normal.

La solución de $L_y = h(x)$ se encuentra, según lo visto en el capítulo 54, analizando $L_y = 0$ así

$$L_G = Y_p + Y_H$$

donde Y_p es una solución particular de $L_y = h(x)$

Ejemplo 2: Si $(D^2 + D)\,Y = x$

entonces;

$$Y_p = x$$

$(D^2 + D)\,Y = 0$ tiene la solución

$$Y_h = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

$$\therefore \quad Y_g = X + C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

9.3. <u>PROP.</u> El espacio solución de la ecuación diferencial lineal homogénea normal de orden n, en el intervalo I

$$a_n(x)\, D^n Y + \ldots\ldots\ a_o(x)\, Y = 0$$

es un subespacio n-dimensional de $\mathcal{C}^n(I)$

<u>Ejemplo 3:</u> $D^2 Y - Y = 0$

Su espacio solución es un subespacio de dimensión 2 en $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$

$Y_1(x) = e^x \quad , \quad Y_2 = e^{-x}$ son L.I.

Luego, forman una base para el espacio solución de la ecuación

$\{ e^x , e^{-x} \}$ base del espacio solución

$$\therefore\ Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

es la solución de la ecuación.

9.4. <u>PROP.</u> Sean $Y_1(x), \ldots\ldots, Y_n(x)$ funciones en $\mathcal{C}(I)$ derivables hasta el orden n-1 en I.

Si $\forall\ x_o \in I$ los vectores

$$(Y_i(x_o),\ Y_i'(x_o), \ldots,\ Y_i^{n-1}(x_o)) \quad \text{con} \quad i = 1, \ldots, n$$

son L.I. $\Longrightarrow$ $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ son L.I.

<u>Ejemplo 4:</u> $\{ e^x, x e^x, x^2 e^x \}$ es L.I. un $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$ ya que si $x = 0$ tenemos, aplicando 9.4.,

$\{(1,1,1),(0,1,2),(0,0,2)\}$ es L.I.

9.5. DEF. WRONSKIANO

Sean $Y_1,\ldots, Y_n$ funciones en $\mathcal{C}^{n-1}(I)$ entonces se define el Wronskiano por

$$W\left[Y_1(x),\ldots, Y_n(x)\right] = \det\begin{pmatrix} Y_1(x)\ldots\ldots & Y_n(x) \\ Y_1'(x)\ldots\ldots & Y_n'(x) \\ & \\ Y_1^{n-1}(x)\ldots\ldots & Y_n^{n-1}(x)\end{pmatrix} \quad (9\text{-}1)$$

(2) Para cada $x \in I$ (9-1) define una función en I con valores reales.

OBS.: Si $A \in \mathcal{M}_{nxn}$ entonces $\det(A) \neq 0$ ssi sus columnas son L.I. al considerarlas como vectores de K^n. Luego tenemos la siguiente Prop.

9.6. PROP. Sean $Y_1,\ldots, Y_n \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$. Entonces $Y_1, Y_2,\ldots, Y_n$ son L.I. ssi $W\left[Y_1,\ldots, Y_n\right] \neq 0$

Ejemplo 5: $\{e^x, e^{-x}\}$ son L.I. en $\mathcal{C}(I)$

$$W\left[e^x, e^{-x}\right] = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x}\end{pmatrix} = -2$$

9.7. PROP. Un conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea normal, de orden n es L.I. en C(I) y por lo tanto una base para el espacio solución de la ecuación ssi su Wronskiano es no nulo en I.

OBS.: Al resolver $(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_o)\, Y = 0$ podemos factorizar el o.d. ℓ. en factores lineales y cuadráticos, por lo visto en el capítulo 4 y aplicar 9.7 y 9.8.

9.8. PROP. La ecuación $(D^2 + a_1 D + a_o)\,y = 0$

Tiene las soluciones:

Si $(D-\alpha)\cdot(D-\beta)\,y = 0$ entonces

(1) Si $\alpha = \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow Y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$

(2) Si $\alpha \neq \beta \Longrightarrow Y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$

(3) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con

$\alpha = a + bi$; $\beta = a - bi$ entonces

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \operatorname{sen} bx)$$

Ejemplo 6: Si $(D^7 - 2D^5 + D^3)\,y = 0$ entonces

$$(D^7 - 2D^5 + D^3)\,y = D^3 (D-1)(D+1)^2\, y = 0$$

$$\therefore\; y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + (C_4 + C_5 x)e^{x} + (C_6 + C_7 x)\, e^{-x}$$

OBS.: El espacio nulo del operador

(1) $(D-\alpha)^m$ contiene las funciones

$e^{\alpha x}$; $x e^{\alpha x}, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x}$

(2) $\left[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)\right]^m$ contiene a

$e^{ax} \operatorname{sen} bx,\; x e^{ax} \operatorname{sen} bx, \ldots, x^{m-1} e^{ax} \operatorname{sen} bx,$

$e^{ax} \cos bx,\; x e^{ax} \cos bx, \ldots, x^{m-1} e^{ax} \cos bx$

E. La transformada de Laplace.

En la resolución de problemas de valor inicial en que intervienen ecuaciones diferenciales lineales se puede hacer uso pleno del concepto de operador lineal y de su inverso.

Desarrollando técnicas extremadamente eficientes para estos efectos, esto se logra estudiando el operador integrar $\mathcal{L}$ conocido como el transformador de Laplace.

Sea f(t) una función de valor real definida en $[0,\infty]$ y consideremos

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

donde s es una variable real.

Si f es tal que ésta integral es convergente entonces se define la transformación lineal llamada transformada de Laplace de f y se denota por;

$$\mathcal{L}[f]\ (s)$$

Ejemplo 7: Si $f(t) = \cos at$; $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathcal{L}[f]\ (s) = \mathcal{L}(\cos at)(s)$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt$$

$$= \frac{s}{S^2 + a^2} \quad \text{en } (0,\infty)$$

F. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales.

9.9. DEF. Sistema de Ecuación Diferencial.

1) Un sistema de m ecuaciones diferenciales con n variables es de la forma:

$$
\begin{matrix}
L_{11} x_1 + \dots + L_{1n} x_n = h_1 (t) \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
L_{m1} x_1 + \dots + L_{mn} x_n = h_m (t)
\end{matrix}
$$

donde L_{ij} son o.d. ℓ. en I y X_j son funciones de t y $h_i(t)$ son contínuos en I.

2) La notación matricial es:

$$
\begin{pmatrix} L_{11} & \cdots\cdots & L_{1n} \\ \vdots & & \\ L_{m1} & \cdots\cdots & L_{mn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_m(t) \end{pmatrix}
$$

3) También se escribe el sistema en la forma

$$L X = H(t)$$

4) Si $H(t) \equiv 0$ se tiene un sistema homogéneo

OBS.: Para resolución de un sistema podemos ocupar lo visto anteriormente o usar el Capítulo 7 (auto valores).

Ejemplo 8: Sea el sistema de coeficientes constantes

$$
\begin{aligned}
(2-D)X_1 - X_2 &= 0 \\
2X_1 + (D-1)X_2 &= 0
\end{aligned}
$$

entonces tenemos;

$$\begin{pmatrix} 2-D & -1 \\ 2 & D-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{pmatrix} 2-D & -1 \\ 2 & D-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2-D & -1 \\ 0 & D(D-3) \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2-D & -1 \\ 0 & D(D-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} (2-D)X_1 - X_2 = 0 \\ D(D-3)X_2 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} X_2 = C_1 + C_2 e^{3t} \\ X_1 = \dfrac{C_1}{2} - C_2 e^{3t} \end{array}$$

la solución general del sistema es:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{C_1}{2} - C_2 e^{3t} \\ C_1 + C_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

<u>OBS.:</u> El método de los valores propios (Capítulo 7) es particularmente adecuado para la resolución de un sistema $n \times n$ de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes.

Sea el sistema $X' = AX$ (9-2)

donde $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$

9.10. PROP. Si A tiene n valores propios reales diferentes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ y $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_n}$ son vectores propios correspondiente a los λ_i. Entonces la solución general del sistema $AX = X'$ es

$$X(t) = C_1 E_{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \ldots + C_n E_{\lambda_n} e^{\lambda_n t}$$

2) Si A es matriz real y E_λ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = a + b_i$ de A. Entonces $E_\lambda e^{\lambda t}$ y $\overline{E_\lambda} e^{\overline{\lambda} t}$ son soluciones de las ecuaciones $X' = AX$

Ejemplo 9: Sea el sistema

$$X_1' = X_1 + 3X_2$$

$$X_2' = X_1 - X_2$$

entonces $\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$

y $f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4$

$f(\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

Para $y = 2 \Longrightarrow v_1 = E_2 = (3,1)$

Para $\lambda_2 = -2 \Longrightarrow v_2 = E_{-2} = (-1,1)$

$\therefore$ la solución general del sistema es

$$X(t) = C_1 E_2 e^{2t} + C_2 E_{-2} e^{-2t} =$$

$$\begin{pmatrix} 3C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} \\ C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 10: Sea el sistema

$$\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$f(\lambda) = \lambda^2 + 1 \Longrightarrow \lambda_1 = i \quad , \quad \lambda_2 = -i$$

Para $\lambda = i \Longrightarrow E_i = (i, 1)$

$$\therefore \quad E_{-i} = (-i, 1)$$

la solución general es:

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t)$$

$$= \begin{pmatrix} -C_1 \operatorname{sen} t - C_2 \cos t \\ C_1 \cos t - C_2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

OBS.: Si $\lambda = a + b_i$ y E_λ su vector propio asociado. Entonces, son soluciones de $X' = AX$, las

$$X_1(t) = e^{at} \left[G_\lambda \cos bt + H_t \operatorname{sen} bt \right]$$

$$X_2(t) = e^{at} \left[H_\lambda \cos bt - G_\lambda \operatorname{sen} bt \right]$$

donde $G_\lambda = \dfrac{E_\lambda + E_\lambda}{2}$ y $H_\lambda = \dfrac{i(E_\lambda - \overline{E}_\lambda)}{2}$

G. Aproximaciones:

El conocimiento de los espacios con producto interno, nos permiten tener aplicaciones en geometría vectorial (por ejemplo distancia de un punto a un plano, proyecciones), en Análisis en el cálculo de los coeficientes de Fourier y en la teoría de errores.

Veamos algo sobre lo último.

En la teoría de errores, el problema puede describirse más suscintamente como la interpretación apropiada de datos experimentales. Veamos una simple ilustración.

Se desea determinar el valor de una constante física C (el peso específico de una sustancia) y se dispone de un método experimental para la medición de C. Entonces se efectúa el experimento n veces y se obtienen las estimaciones $X_1, \ldots, X_n$ de C. El problema es encontrar la "mejor aproximación" a C, disponible de los datos experimentales.

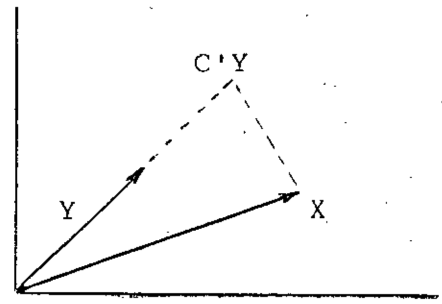
Para hacerlo se toman las n medidas experimentales como un vector $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $Y = (1, \ldots, 1)$ tal que,

$$CY = (C, \ldots, C)$$

Interpretamos el término "mejor aproximación" como distancia en $\mathbb{R}^n$ y si C' es esta aproximación, debe escogerse de manera que $d(C'Y, X) < \varepsilon$

es decir C' se determina por la exigencia que C'Y sea la proyección perpendicular de X sobre el subespacio generado por Y.

Pero por el Capítulo 8 tenemos que la proyección es



Y = (1,1)

$$\frac{(X \setminus Y)}{(Y \setminus Y)}\, Y =$$

luego

$$C' = \frac{X \cdot Y}{Y \cdot Y} = \frac{X_1 + \ldots\ldots + X_n}{n} \qquad (9\text{-}4)$$

Generalizando apropiadamente, el método anterior dará aproximaciones tanto a vectores como a escalares.

Sea $C = (C_1,\ C_2) \in \mathbb{R}^2$ y en conjunto mediciones

$X_1 = (X_{11},\ X_{12}), \ldots\ldots,\ X_n(X_{n1},\ X_{n2})$

de C. Deseamos encontrar la mejor aproximación a $C' = (C_1', C_2')$ usando los X_i de C consideremos el vector.

$$X = (X_{11},\ X_{21}, \ldots,\ X_{n1},\ X_{12}, \ldots,\ X_{n2}) \in \mathbb{R}^{2n}$$

y $Y_1,\ Y_2 \in \mathbb{R}^{2n}$ vectores ortogonales tales que

$Y_1 = (1, \ldots,\ 1,\ 0, \ldots,\ 0)$ n veces 1

$Y_2 = (0, \ldots,\ 0,\ 1, \ldots,\ 1)$

Tomando C_1', C_2' tales que $C_1' Y_1 + C_2' Y_2$ sea la proyección perpendicular de X sobre el subespacio generado por Y_1 e Y_2. Luego $X - (C_1' Y_1 + C_2 Y_2')$ debe ser perpendicular a Y_1 e Y_2, entonces,

$$C_1' = \frac{X \cdot Y_1}{Y_1 \cdot Y_1} \quad \text{y} \quad C_2' = \frac{X \cdot Y_2}{Y_2 \cdot Y_2}$$

$$\therefore \quad C_1' = \frac{X_{11} + \ldots\ldots + X_{n-1}}{n} \quad y \quad C_2' = \frac{X_{12} + \ldots\ldots + X_{n2}}{n}$$

$$y \qquad C' = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots\ldots + X_n) \tag{9-5}$$

Se caracteríza como el vector en $\mathbb{R}^2$ que sea mínima la cantidad

$$\sum_{i=1}^{n} \| X_i - C' \|^2 \tag{9-6}$$

En general, n determinaciones experimentales $X_1, \ldots, X_n$ de un vector C en $\mathbb{R}^n$ puede manejarse de la misma forma.

Un problema afín de este tipo ocurre cuando se dá un escalar, y, que depende de otro escalar, X, esto es, Y = CX, y se intenta determinar el valor de C experimentalmente (desplazamiento de un resorte). En este caso el experimento produce los valores $X_1, \ldots, X_n$ de X y los valores correspondientes $Y_1, \ldots, Y_n$ para Y que pueden disponerse como un sistema de n ecuaciones y una única variable C.

$$\begin{aligned} Y_1 &= CX_1 \\ Y_2 &= CX_2 \\ &\vdots \\ Y_n &= CX_n \end{aligned} \tag{9-7}$$

El problema es determinar la mejor aproximación para C proporcionada por estos datos.

Consideremos los vectores en $\mathbb{R}^n$.

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \quad e \quad Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$$

Se trata de encontrar el escalar C' tal que el vector C' X en el subespacio generado por X esté lo más cerca de Y. Se debe escoger C' tal que la longitud del vector C' X-Y sea pequeña. Es decir C' debe reducir al mínimo la cantidad.

$$\| C'X - Y \|^2$$

pero,

$$\| C'X-Y \|^2 = (C'X-Y)\cdot(C'X-Y)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (C'X_i - Y_i)^2 \qquad (9\text{-}10)$$

entonces la mejor aproximación a C es el escalar que reduce al mínimo la suma (9-10).

Este método de aproximación es llamado el método de los MINIMOS CUADRADOS, y para calcular C' explícitamente tenemos que;

$$C'X-Y \perp X \Longrightarrow (C'X-Y)\cdot X = 0$$

$$\therefore \quad C' = \frac{X\cdot Y}{X\cdot X}$$

$$C' = \frac{X_1Y_1 + \ldots + X_nY_n}{X_1^2 + \ldots + X_n^2} \qquad (9.11)$$

<u>Ejemplo :</u> Encontrar la M.A. a C obtenible de

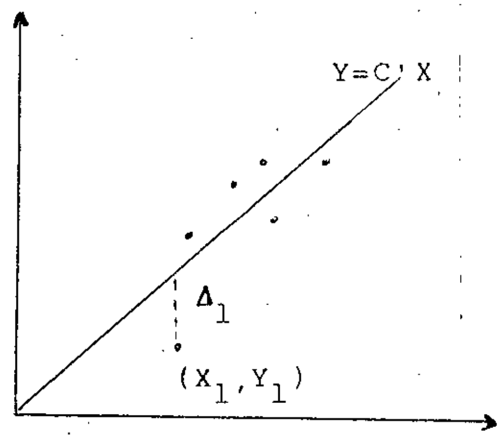
$$2 = C \qquad 5 = 4C$$
$$2 = 3C \qquad 6 = 6C$$

<u>Sol.:</u> $X = (1,3,4,6)$, $Y = (2,2,5,6)$

$$C' = \frac{X \cdot Y}{X \cdot X} = \frac{2 + 6 + 20 + 36}{1 + 9 + 16 + 36} = \frac{32}{31}$$

Este tipo de aproximación, surge a menudo como un problema de ajustar una curva.

Es decir se pide encontrar una recta $Y=C'X$ que pase por el origen que mejor acomode los puntos $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$



El método de solución es designar por $\Delta_i = C'X_i - Y_i$ y luego elegir C' tal que la suma de los cuadrados de los Δ_i sea mínima.

Pero esta suma es justamente la cantidad dada en (9-10) y el problema es idéntico al resuelto antes.

Veamos el caso general en que un escalar, Y, es c. ℓ. de los escalares $X_1, \ldots, X_m$.

$$Y = C_1 X_1 + \ldots + C_m X_m$$

Se hacen n experimentos $(n > m)$ y el experimento i ha dado $X_{i1}, \ldots, X_{im}$ e Y_i para $X_1, \ldots, X_m$, y. Es decir tenemos el sistema

$$\begin{aligned} Y_1 &= C_1 X_{11} + \ldots + C_m X_{1m} \\ &\vdots \\ Y_n &= C_1 X_{n1} + \ldots + C_m X_{nm} \end{aligned}$$

El problema es encontrar los $C_1', \ldots, C_m'$ para los C_i que aproximan los $C_j X_{ij}$ a los Y_i lo más posible.

En efecto consideremos los vectores:

$$X_1 = (X_{11}, X_{21}, \ldots, X_{n1})$$
$$\vdots$$
$$X_m = (X_{1m}, \ldots\ldots, X_{nm})$$
$$Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$$
$$W = \langle X_1, \ldots, X_m \rangle \leqslant \mathbb{R}^n$$

y $\{X_1, \ldots, X_m\}$ base de W

Los C_i' se eligen de manera que el vector

$$C_1' X_1 + \ldots + C_m X_m$$

sea la proyección perpendicular de Y sobre W. Así, los C_i' deben minimizar la longitud del vector

$$(C_1' X_1 + \ldots. + C_m' X_m) - Y$$

es decir a $\sum_{i=1}^{n} \left[(C_1' X_{i1} + \ldots. + C_m X_{im}) - Y_i \right]^2$

En la práctica, los C_i' se determinan a partir de las relaciones de ortogonalidad.

$$\left[(C_1' X_1 + \ldots. + C_m' X_m) - Y \right] \cdot X_i = 0 \quad ; \quad i = 1, \ldots, m$$

que nos dan el sistema

$$(X_1 \cdot X_1) C_1' + \ldots + (X_1 \cdot X_m) C'_m = X_1 \cdot Y$$
$$(X_2 \cdot X_1 \, C_1 + \ldots. + (X_2 \cdot X_m) C_m' = X_2 \cdot Y$$
$$\vdots$$
$$(X_m \cdot X_1) C_1' + \ldots. + (X_m \cdot X_m) C'_m = X_m \cdot Y$$

en las m variables $C'_1, \ldots, C'_m$. Estas ecuaciones se llaman Ecuaciones Normales para la aproximación en cuestión.

H. PROGRAMACION MATEMATICA (P.M.)

En muchos problemas de decisión, las alternativas posibles y criterios de evaluación pueden ser razonablemente formulados en términos de un modelo matemático. Que permiten, en forma más fácil, derivar reglas que permitan determinar las dicisiones más convenientes, como asimismo evaluar la incidencia que sobre estas decisiones pueden tener variaciones en algunos de los factores considerados.

Dentro de estos modelos matemáticos, la Programación Matemática ocupa un lugar profesional. La P.M. está generalmente asociada con decisiones de corto plazo, en que las decisiones posibles están restringidas y ésto se debe seleccionarse de modo que maximice o minimice un criterio de evaluación único.

Formalmente, en un problema de P.M. se trata de determinar el vector $X^t = (X_1, \ldots, X_n) \in X$, $X \in \mathbb{R}^n$, maximice una función matemática. $f(X_1, \ldots, X_n)$ que sintetice el objetivo de la decisión. Es decir debemos resolver el problema.

$$\text{Max } f(X_1, \ldots, X_n)$$

en que $X^t = (X_1, \ldots, X_n) \in X \subset \mathbb{R}^n$

o bien;

$$\max_{X \in \mathcal{X}} f(X)$$

El set X se llama set de oportunidades y f(x) función objetivo.

Dos importantes casos especiales de P.M. lo contituyen la Programación No Lineal y la Programación Lineal.

En el primero, el set de oportunidades (o de decisiones) posibles X está caracterizado por:

$$X = \{ x \,/\, g(x) \leqslant b \ ; \quad x \geqslant 0 \}$$

en que

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1 \ (X_1, \ldots, \ X_n) \\ \vdots \\ g_i \ (X_1, \ldots, \ X_n) \end{pmatrix} \qquad ; \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

La P.L. es en realidad un caso particular de la P.N.L. en el cual la función objetivo $f(x)$ y las funciones $g_i(x)$ son lineales.

Estudiaremos como resolver un problema de P.L. pero, solamente abarcaremos una pequeña introducción a la P.L. (esta parte se desarrollará en clase) y un verdadero estudio de la P.L. se aborda en el curso de la Investigación Operacional.

Desde el punto de vista de la programación matemática, el problema de P.L. puede formularse como:

$$\text{Max} \qquad C_1 X_1 + \ldots + C_n X_n$$

s.a.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} X_1 + \ldots + a_{1n} X_n & \leqslant & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} X_1 + \ldots + a_{mn} X_n & \leqslant & b_m \end{array}$$

$$X_1 \geqslant 0, \ldots, \ X_m \geqslant 0$$

o bien:

$$\text{Max} \quad C\,X$$

$$\text{s.a.} \quad A\,X \leq b$$

$$X \geq 0$$

Veremos un ejemplo que nos permitirá visualizar una solución gráfica del problema y para luego analizar en clase un algoritmo de solución llamado Método Simplex, como también en Análisis de sensibilidad.

Ejemplo: Un taller puede fabricar dos productos diferentes utilizando tres tipos de máquinas. El problema consiste en planificar la producción del taller en el corto plazo (por ej. semanal). Supongamos que el objetivo es escoger la producción mensual que maximice las utilidades netas.

El proceso de fabricación puede describirse de la manera siguiente. Ambos productos requieren de las 3 máquinas, siendo imposible utilizar la misma máquina simultáneamente para la elaboración de los dos productos. Y se tiene la siguiente tabla que muestra las horas disponibles de cada máquina y las horas requeridas por cada producto.

Máq.	Prod. 1.	Prod. 2	Horas/Semana
1	2	1	70
2	1	1	40
3	1	3	90

Precio unitario	70	120
Costo Unitario	30	60

Formulemos el problema mediante un modelo matemático.

En efecto:

Sea X_1 : Producción semanal de producto 1.

X_2 : Producción semanal de producto 2.

$\therefore$ Max $B = 40X_1 + 60X_2$

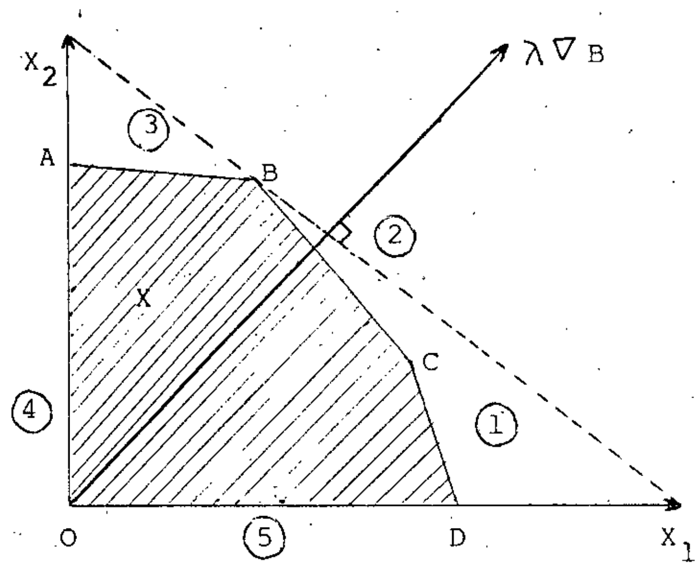
s.a. $2X_1 + X_2 \leq 70$ (1)

$X_1 + X_2 \leq 40$ (2)

$X_1 + 3X_2 \leq 90$ (3)

$X_1 \geq 0$ (4)

$X_2 \geq 0$ (5)



X : El set de oportunidades corresponde a los diferentes planes de producción (polígono OABCD)

$$\nabla B = \left(\frac{\partial B}{\partial X_1}, \frac{\partial B}{\partial X_2} \right) = (40,60)$$

$X' = (15,25)$ Solución o programa de producción

$B = \$ \ 2.100$