FUNDAMENTOS DE MATEMATICA

Manuel Barahona D.
Eliseo Martínez H.

Ediciones de la Universidad de Atacama

Copiapó - Chile

PROLOGO

El libro que el lector tiene en sus manos es el producto de una larga reflexión y su característica es que escapa a la versión clásica de los cursos básicos de nivelación. Tiene la intención de dar a los estudiantes una visión introductoria no sólo de algunos temas de la matemática elemental, sino además, de iniciarlos en la matemática aplicada relacionada con los **modelos matemáticos**.

Los autores están convencidos de la necesidad de familiarizar a los estudiantes desde el principio de sus estudios de matemática con el concepto de modelo, y al mismo tiempo usar las modernas herramientas de cálculo como son la calculadora manual y un software de matemática avanzado como es el DERIVE.

Se hace más énfasis en la calidad de la materia que en la cantidad, con la pretensión de que el estudiante y el profesor, tengan la oportunidad de profundizar y madurar las ideas que surgen, tanto de la matemática, como de los fenómenos que se estudian.

A pesar del carácter introductorio de los contenidos del texto, los problemas que se plantean y se examinan no son sencillos para el estudiante primerizo, sin embargo esperamos que éstos asuman con responsabilidad este hermoso reto.

Los autores

CONTENIDOS

Indice general

Capítulo 1. Los números reales

Capítulo 4. El modelo exponencial.

FUNDAMENTOS DE MATEMATICA

(Versión Preliminar)

Dr. Manuel Barahona D.

Prof. Universidad de Atacama

Dr. Eliseo Martínez H.

Prof. Universidad de Atacama

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación

Capítulo 1 Los números reales

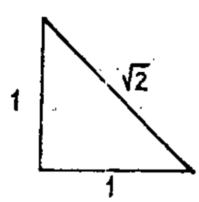
Objetivos

1. **Recordar las propiedades de los números reales.**
2. **Recordar el concepto de valor absoluto y función valor absoluto.**
3. **Resolver inecuaciones lineales y cuadráticas.**
4. **Utilizar EL DERIVE para resolver inecuaciones y graficar funciones con valor absoluto.**

1.1 El sistema de los números reales

Desde la más temprana edad empezamos a trabajar con los números reales, sin imaginar siquiera que el hombre se demoró miles de años en precisar su verdadera naturaleza.

Históricamente, primero se inventaron los números naturales y posteriormente las fracciones; este hecho ocurrió hace varios miles de años. El conocimiento de estos números le permitió a las civilizaciones egipcia y babilónica un notable progreso económico y social. Posteriormente, durante el apogeo de la cultura griega, hace alrededor de 2 500 años, los griegos se vieron en la necesidad de inventar los números irracionales simples tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.



Cuenta la leyenda que un pitagórico curioso intentó medir la longitud de la cuyo denominador es cero no tiene ningún sentido, por lo tanto es un error escribir $\frac{a}{0}$, cualesquiera sea el número entero a. Lo mismo no tiene sentido escribir $\frac{0}{0}$.

Por el hecho de que las fracciones se expresan mediante la **razón** entre dos números enteros se les llamó **Números Racionales**. Estos números se designan con la letra $\mathbb{Q}$ a causa de la palabra inglesa **quotien**, que significa cociente. El conjunto de los Números Racionales se denota abreviadamente mediante:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, \text{ tal que, } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

De la definición de número racional se desprende de inmediato que los números naturales y enteros son también racionales. Observe, por ejemplo, que los números 2, -13, etc, se pueden escribir en la forma $\frac{2}{1}$, $\frac{-13}{1}$ etc, respectivamente.

El hecho de que tanto los números naturales como los números enteros sean subconjuntos del conjunto de los números racionales, lo escribimos en notación de conjuntos en la forma siguiente:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

Todos los números que no pertenecen al conjunto de los números racionales se llaman Números Irracionales y se designan con la letra mayúscula $\boldsymbol{I}$ por influencia de la palabra inglesa **irrational**.

A pesar de que los números irracionales permiten efectuar mediciones más precisas que todos los otros números, la mayoría de las veces, por motivos prácticos, aproximamos los números irracionales con números racionales. Así, por ejemplo, con frecuencia escribimos $\pi \approx 3,14$.

El conjunto de los **Números Reales**, que denotaremos por la letra $\mathbb{R}$, está formado por la **unión** del conjunto de los números racionales y los números irracionales, esto es:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$$

De lo antes dicho se desprenden las siguientes relaciones entre conjuntos:

$$a)\ \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \qquad b)\ \mathbb{Q} \cap \boldsymbol{I} = \phi \qquad c)\ \mathbb{Q} \cup \boldsymbol{I} = \mathbb{R}$$

1.2 La recta numérica

No olvidemos que los números reales sirven fundamentalmente para medir y calcular y su invención a través del tiempo tuvo siempre ese carácter. Al principio el hombre se contentó con realizar mediciones muy groseras, pero a medida que se fue desarrollando el comercio, la navegación, la industria, y otras actividades, se vio en

a) La propiedad transitiva: si $x < y$; $y < z$, entonces $x < z$

b) La propiedad aditiva: si $x < y \iff x + z < y + z$

c) La propiedad multiplicativa:

i) si $z > 0$; $x < y \iff xz < yz$

ii) si $z < 0$; $x < y \iff xz > yz$

Estas propiedades también se cumplen si reemplazamos los símbolos "$<$" y "$>$" por los símbolos "$\leq$" y "$\geq$" que se leen, menor o igual y mayor o igual respectivamente.

1.5 Desigualdades o inecuaciones

Es probable que casi toda la experiencia matemática del lector, esté ligada a las ecuaciones, es decir a las igualdades. Sin embargo, **la realidad se comporta mas bien con aproximaciones; con desigualdades.** Así, por ejemplo, cuando medimos distancias, superficies y volúmenes, con seguridad estas mediciones contienen errores. Tales mediciones que oscilan entre dos números, debemos expresarlas utilizando el lenguaje de las desigualdades. Cuando decimos que el volumen V de un cilindro es mayor o igual que $30cm^3$ y menor o igual que $32cm^3$, escribimos:

$$30cm^3 \leq V \leq 32cm^3$$

Ejemplo 1

¿Cómo debe variar el radio de una esfera para que su volumen sea mayor que $12cm^3$?

SOLUCIÓN Si el volumen de la esfera está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ la desigualdad que expresa este hecho es:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 > 12$$

Si aproximamos $\pi = 3$ la desigualdad se escribe:

$$4r^3 > 12 \iff r^3 > 3$$

De esto se desprende que el radio de la esfera debe ser mayor que $\sqrt[3]{3}$.

De estas y otras consideraciones que analizaremos más adelante, se infiere la necesidad de aprender a operar también con desigualdes.

Efectuando las operaciones que están indicadas se obtiene:

$$2x \geq -1$$

II) El sentido de la desigualdad no cambia si los dos miembros se multiplican o se dividen por el mismo número positivo.

Ejemplo 5

En la desigualdad $2x \geq -1$ del ejemplo anterior, podemos multiplicar ambos miembros por $\frac{1}{2}$, o lo que es lo mismo dividir ambos miembros por 2, para obtener la desigualdad equivalente:

$$\frac{2x}{2} \geq -\frac{1}{2}, \text{ esto es, } x \geq -\frac{1}{2}$$

Podemos resumir todo este proceso en la forma siguiente:

$$2x + 3 \geq 2 \quad / + (-3) \text{ equivalente con}$$
$$2x + 3 + (-3) \geq 2 + (-3) \Longleftrightarrow 2x \geq -1$$

De esto se desprende que:

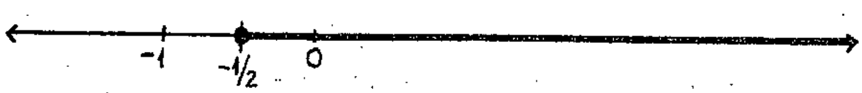
$$2x \geq -1 \quad / : 2 \Longleftrightarrow \frac{2x}{2} \geq -\frac{1}{2}$$

de lo cual se deduce que: $x \geq -\frac{1}{2}$. Observe que para resolver la inecuación debemos despejar la incognita **x** tal como lo hacemos con las ecuaciones. En lenguaje conjuntista escribimos que la solución de la ecuación es:

$$S = \{x / x \geq -\frac{1}{2}\}$$

Este conjunto de puntos puede visualizarse fácilmente en la recta numérica. En efecto, los valores de **x** que son soluciones de dicha inecuación se hallan todos a la derecha de $-\frac{1}{2}$, incluido el número $-\frac{1}{2}$. Ver fig(2).

fig (2)



III) El sentido de la desigualdad se invierte si los dos miembros se multiplican o se dividen por el mismo número negativo.

1.8 Ejercicios resueltos

1. Resuelva las siguentes inecuaciones y exprese las soluciones en notación de intervalos y de conjuntos.

1) $\frac{x}{2}+1<\frac{3x-2}{3}$ 2) $x>2-\frac{x-2}{5}+\frac{x+3}{2}$ 3) $(x-3)(x+1)\leq 0$

4) $\frac{x-3}{x+1}>0$ 5) $1+\frac{x+2}{4x}\leq 2$

SOLUCIÓN 1. Tal como vimos en los ejemplos anteriores, para resolver esta inecuación debemos despejar la variable **x** utilizando las propiedades de las igualdades y de las desigualdades. En este caso conviene primero deshacerse de las fracciones; para esto es suficiente multiplicar la inecuación por 6. En efecto:

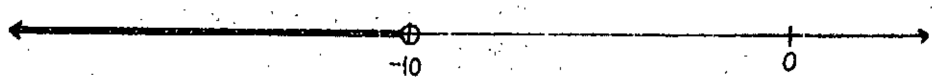
$$\frac{x}{2}+1<\frac{x-2}{3}\quad /\cdot 6 \quad \text{es equivalente con} \quad 3x+6<2x-4$$

Despejando la variable x, resulta que $x<-10$. Expresando la solución en notación de conjuntos se tiene:

$$S=\{x/x<-10\} \quad \text{y en lenguaje de intervalos:} \quad S=]-\infty,-10[$$

Gráficamente tenemos:

fig (4)



2) Esta inecuación se resuelve en forma análoga a la anterior. Multiplicando la ecuación por 10, se tiene:

$$x>2-\frac{x-2}{5}+\frac{x+3}{2} \quad /\cdot 10$$

$$10x>20-2(x-2)+5(x+3), \quad \text{es decir}$$

$$10x>20-2x+4+5x+15, \quad \text{luego,}$$

$$10x>39+3x, \quad \text{por lo tanto,}$$

$$7x>39, \quad \text{de donde resulta que,}$$

$$x>\frac{39}{7}$$

En notación conjuntista

$$S=\{x/x>\frac{39}{7}\}$$

De lo anterior se desprende que el conjunto de todos los **x** que satisfacen iii) y iv) se hallan en la intersección de ambos intervalos, es decir, en:

$$S_2 =]-\infty,-1] \cap]-\infty,3] =]-\infty,-1]$$

Finalmente la solución S de la inecuación propuesta inicialmente es igual a la unión de S_1 con S_2, esto es:

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$$

Hemos resuelto satisfactoriamente la inecuación propuesta. Sin embargo, mediante la tabla (1) llegaremos al mismo resultado en una forma rápida y cómoda.

tabla (1)

	$-\infty$ -1	-1 3	3 ∞
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

La tabla se ha construido de acuerdo a las siguientes premisas. Los binomios $(x+1)$ y $(x-3)$ de la inecuación propuesta se colocan en las dos primeras filas y en la tercera se coloca el producto $(x+1)(x-3)$. Puesto que estamos interesados en estudiar las soluciones de la inecuación en el intervalo $]-\infty,+\infty[$, se colocan en la parte superior de las columnas, en ambos extremos, los símbolos $-\infty$ y $+\infty$. Los números -1 y 3, que son las soluciones de las ecuaciones $x+1=0$ y $x-3=0$ respectivamente, van puestos tal como se indica.

Debemos, ahora, estudiar los signos de cada uno de los binomios en los intervalos abiertos $]-\infty,-1[$, $]-1,3[$, y $]3,+\infty[$. Para saber esto es suficiente que el lector evalúe los binomios para los números reales que pertenecen a dichos intervalos.

a) Observe que el binomio $(x+1)$ es negativo en el intervalo $]-\infty,-1[$; es positivo en el intervalo $]-1,3[$; y es positivo en el intervalo $]3,+\infty[$.

b) Por otra parte el binomio $(x-3)$ es negativo en los intervalos $]-\infty,-1[$ y $]-1,3[$ y positivo en $]3,+\infty[$

Los signos correspondientes al producto $(x+1)(x-3)$, en la última fila, se obtienen de acuerdo con la regla de los signos:

$$i)\ (-)\cdot(-)=+ \quad ii)\ (+)\cdot(-)=- \quad iii)\ (+)\cdot(+)=+$$

Los números -1 y 3 se calcularon resolviendo las ecuaciones $x-3=0$ y $x+1=0$. Del analisis de los signos de los binomios en cada uno de los intervalos, en una forma análoga al ejercicio anterior, resulta la tabla (4).

tabla (4)

$-\infty$ $\quad -1 \quad$ 3 $\quad \infty$

$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

Por otra parte la solución de la inecuación no puede contener ni al -1 ni al 3. En efecto: para $x=-1$ la fracción resultante no tiene sentido; para $x=3$ se tiene que $\frac{3-3}{x+1}=0$, luego 3 no puede ser solución de la inecuación.

De la tabla anterior se desprende que la solución es:

$$S=]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$$

5) Cuando resolvemos una inecuación debemos tratar siempre de expresarla mediante un producto o un cociente de binomios mayor o igual que cero, o menor o igual que cero, para poder utilizar el método que hemos desarrollado. Este es el caso, por ejemplo, de la inecuación propuesta. Resulta entonces que:

$$1+\frac{x+2}{4x}\leq 2 \iff \frac{x+2}{4x}-1\leq 0 \quad \text{es decir}$$

$$\frac{x+2-4x}{4x}\leq \iff \frac{2-3x}{4x}\leq 0$$

Observemos que esta última inecuación es similar a la que hemos resuelto en el ejercicio anterior y la tabla, cuyos **puntos críticos** son $\frac{2}{3}$ y 0, es la siguiente:

tabla (5)

$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $2/3$ $\quad \infty$

$2-3x$	$+$	$+$	$-$
$4x$	$-$	$+$	$+$
$\frac{2-3x}{4x}$	$-$	$+$	$-$

Note que el cero no puede ser solución de la inecuación ya que, para este valor, la inecuación se indefine. En cambio para $\frac{2}{3}$ la inecuación es igual a cero, por lo tanto $\frac{2}{3}$ es una solución. De la tabla se desprende de inmediato que la solución de la inecuación es:

$$S=]-\infty,0[\cup[\frac{2}{3},+\infty[$$

Lo que significa que la altura del cono que el fabricante tiene que construir debe oscilar entre 1,63 m y 1,79 m, esto es,

$$0,1,63 \leq h \leq 1,79$$

3. Resuelva los siguientes sistemas de inecuaciones.

$a)\ \begin{cases} 2x-5 > & x-2 \\ x+8 < & 12 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{1}{4} < & 0 \\ x < & 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} \frac{1}{x}-4 < & 1 \\ x+12 < & 0 \end{cases}$

a) De acuerdo a lo dicho debemos resolver cada una de las ecuaciones y luego intersectar las soluciones.

$$i)\ 2x-5 > x-2 \iff x > 3 \text{ por lo tanto } S_1 =]3,+\infty[$$

$$ii)\ x+8 < 12 \iff x < 4 \text{ por lo tanto } S_2 =]-\infty,4[$$

En consecuencia la solución del sistema es:

$$S =]3,+\infty[\cap]-\infty,4[=]3,4[$$

b) En la misma forma se tiene:

$$i)\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} < 0 \iff x < \frac{1}{2} \text{ y luego } S_1 =]-\infty,\frac{1}{2}[$$

$ii)$ puesto que $x < 1$, resulta que $S_2 =]-\infty,1[$

En consecuencia la solución es: $S =]-\infty,\frac{1}{2}[\cap]-\infty,1[=]-\infty,\frac{1}{2}[$

c) Finalmente se tiene que:

$$i)\ \frac{1}{x}-4 < 1 \iff \frac{1-5x}{x} < 0$$

Para resolver la inecuación $\frac{1-5x}{x} < 0$ debemos utilizar la tabla acostumbrada, cuyos puntos críticos son 0 y $\frac{1}{5}$. Resulta entonces:

tabla (6)

	$-\infty$ a 0	0 a $1/5$	$1/5$ a ∞
$1-5x$	+	+	−
x	−	+	+
$\frac{1-5x}{x}$	−	+	−

Algunas propiedades del valor absoluto son las siguientes:

$$i)\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad ii)\ |a+b| \leq |a| + |b| \qquad iii)\ |a\cdot b| \leq |a|\cdot|b|$$

1.11 Desigualdades con valor absoluto

A continuación resolveremos algunas desigualdades en las cuales es necesario aplicar el concepto de valor absoluto.

Ejemplo 9

Hallar la solución de la inecuación $|x| \leq 2$

SOLUCIÓN. Teniendo en cuenta el concepto de valor absoluto como una distancia, se ve claramente que el conjunto solución de la inecuación está formado por todos los puntos cuya distancia al origen es menor o igual que 2. De esto se desprende que la solución de la inecuación es el intervalo cerrado $[-2, 2]$. Si nuestra desigualdad fuese $|x| \leq a$ resultaría que el conjunto solución estaría formado por todos los puntos cuya distancia al origen es menor o igual que **a**. Esto nos sugiere las siguientes proposiciónes:

$$(1) \qquad |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

$$(2) \qquad |x| < a \iff -a < x < a$$

Ejemplo 10

Resuelva las desigualdades: $a)$ $|x| \leq 10$ $\quad b)$ $|x-2| < 1$;

SOLUCIÓN. Aplicando en cada caso la proposición correspondiente, resulta:

a) $|x| \leq 10 \iff -10 \leq x \leq 10$, por lo tanto la solución de la desigualdad es el intervalo $[-10, 10]$

b) $|x-2| < 1 \iff -1 < x - 2 < 1$. Puesto que estamos interesados en determinar los valores de la variable **x** que satisfacen la desigualdad propuesta, Debemos hallar ahora la solución para cada una de las inecuaciones y **unirlas.** En efecto:

i) $2x-5 \leq -1 \iff 2x \leq 4 \iff x \leq 2,$ luego la solución es $S_1 =]-\infty, 2]$

ii) $2x-5 \geq 1 \iff 2x \geq 6 \iff x \geq 3,$ luego la solución es $S_2 = [3, +\infty[$

En consecuencia la solución de la inecuación es $S =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

Finalmente en c) $12|x-8| \geq 36 \iff |x-8| \geq 3 \iff x-8 \leq -3 \; o \; x-8 \geq 3$

De donde resulta que, $x \leq 5 \; o \; x \geq 11$ por lo tanto $S =]-\infty, 5] \cup [11, +\infty[$

1.12 Ejercicios propuestos

1. Halle los valores de x para los cuales son positivas las expresiones siguientes:

   a) $3x-5$ *b)* $12x - \frac{x}{2}$ *c)* $\frac{1}{x} + 2$ *d)* $5(x-1)(x+2)$

2. Determine los valores de x que hacen negativas las expresiones siguientes:

   a) $x-4$ *b)* $-x-(x-2)-1$ *c)* $\frac{x}{3} + \frac{x}{4}$ *d)* $\frac{x}{2}$

3. Resuelva las siguientes inecuaciones y exprese la solución gráficamente.

   a) $(x+1)^2 + 7 > (x+4)^2$ *b)* $\frac{7-6x}{2} + 12 < \frac{8x+1}{3} - 10x$

   c) $3,01x - 2,71 + 1 > \frac{x}{0,1}$ *d)* $\frac{201}{3} + \frac{x-1}{0,5} + 1 < \frac{12}{0,4}$

4. Determine los valores de x para los cuales los radicales dados representan números reales.

   a) $\sqrt{3-x}$ *b)* $\sqrt{x-(2x+3)}$ *c)* $\sqrt{(x-1)(x-2)}$

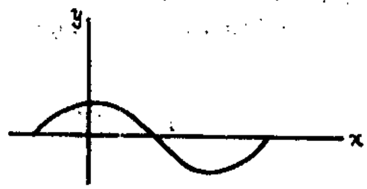
5. En las siguientes parábolas determine el conjunto de puntos tales que:

   a) $y = x^2 - 2x - 3$ está sobre el eje de las x.

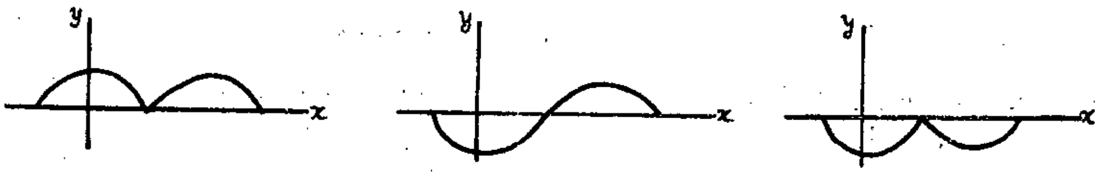
   b) $y = x^2 + 6x + 8$ está bajo el eje de las x.

   c) $y = x^2 + x$ pertenece al eje x.

17. El gráfico de la función f es el de la figura siguiente:



¿Cuál de los gráficos de más abajo representa aproximadamente la función $|f|$.



18. Determine el intervalo en el cual la función $g(x) = \frac{(1+x^2)-2x^2}{(1+x^2)^2}$ es mayor que cero.

19. ¿En qué intervalo la función $f(x) = \frac{(2x-2)-(x-1)^2}{(x-3)^2}$ es menor que cero?

20. ¿ El gráfico de la función $g(x) = \frac{x^2}{x^2+x+1}$ está sobre el eje x?. Justifique su respuesta

21. ¿En qué intervalo la función $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-\frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} \geq 0$

22. Trace el gráfico de las funciones a) $y = |x|$ b) $y = |x+2|$

23. De acuerdo con la ley de Boyle, la presión p (en libras por pulgada cuadrada) y el volumen v (en pulgadas cúbicas) de un cierto gas satisfacen la igualdad

$$pv = 800$$

¿Cuál es el rango de valores posibles de la presión, si $100 \leq v \leq 200$?.

24. La relación entre la temperatura Farenheit F y la temperatura Celcius] C está dada por

$$F = 32 + \frac{9}{5}C$$

Si el rango de temperaturas en un cierto día va de 70 grados Farenheit a la mñima a la máxima de 90, ¿Cuál es el rango de variación de la tempreratura en grados celcius ?.

1.14 El DERIVE

Al ejecutar EL DERIVE la pantalla aparece dividida en dos partes. La parte superior, en la cual se leen las especificaciones relativas al programa y la parte inferior en la cual se lee lo siguiente:

Command: Author, Build, Calculus, Declare, Expand, Factor, Help, Jump, Solve, Manage, Options, Plot, Jump, Remove, Simplify, Transfer, move, Window, Approx.

Con la barra espaciadora usted puede mover el cursor sobre cada una de las funciones que aparecen a la derecha de **Command**. Para ejecutarlas, después que el cursor este sobre la función elejida, es suficiente presionar la tecla **Enter**.

1.14.1 Solución de inecuaciones.

Ejemplo

Resolver la inecuación $\frac{x-1}{4} + \frac{2}{5} > \frac{x}{3}$

Para resolver la inecuación propuesta, coloque el cursor en Author y presione la tecla Enter. A continuación efectúe la siguiente sucesión de operaciones.

1. Frente a **Author expression:** escriba $(x-1)/4 + 2/5 > x/3$ y presione la tecla **Enter**.
2. En la parte superior de la pantalla aparece $1 : \frac{x-1}{4} + \frac{2}{5} > \frac{x}{3}$
3. Coloque el cursor en **Solve** y presione la tecla **Enter**.

9. Aparece el gráfico de la función $y = |x - 1|$. Presionando la tecla Enter se limpia la parte superior de la pantalla y en la parte inferior aparece nuevamente **Command:**

Nota. Usted puede achicar o agrandar el gráfico modificando la escala en los ejes coordenados. Para esto debe poner el cursor en *Scale*, presionar la tecla **Enter** y efectuar los cambios que desee en los ejes x e y.

1.14.3 Ejercicios suplementarios.

Utilice El DERIVE para graficar las funciones que se indican, a continuación haga el gráfico de las funciones con valor absoluto. Explique, en ellos, "que hace" el valor absoluto.

1. $f(x) = 2 - 5x$
2. $f(x) = 10 - x^2$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
4. $f(x) = x^3$
5. $y = \frac{1}{x+5}$
6. $y = x^3 + 3x^2 - 12x$
7. $y = 3x^4 - 4x^2 - 12x^2 8$
8. $y = 8x^4 - x^8$
9. $y = 6 + 8x^2 - x^4$

Rectangulares (llamado posteriormente Sistema Cartesiano de Coordenadas), y las funciones pudieron graficarse.

A pesar del extraordinario desarrollo de la física, matemática, astronomía y otras disciplinas entre los siglos XVI y XVIII, el concepto de función no fue definido claramente sino hasta el año 1837. En esta fecha **Gustavo Dirichlet (1805-1859)**, en una memoria aparecida en dicho año dio la siguiente definición:

> *"Una cantidad "y" se llama función de una cantidad variable "x", si a cada valor de "x" le corresponde un único valor de "y"*

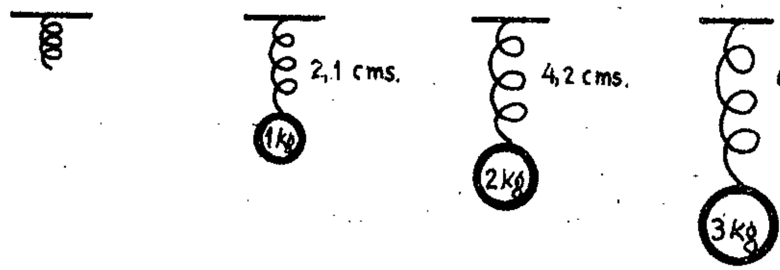
Años más tarde cuando se inventó la teoría de conjuntos a las palabras, "a cada valor de", se le agregarían las palabras "perteneciendo a un conjunto".

Durante más de dos siglos los matemáticos y físicos habían estudiado fenómenos relativos al calor, mecánica, dinámica, electricidad, magnetismo, etc, sin tener una definición clara y precisa de dicho concepto. Sin embargo, este hecho no impidió a los científicos alcanzar los más notables progresos en sus respectivas disciplinas, utilizando un concepto intuitivo de función. Esto muestra que muchas veces, en un determinado contexto los conceptos intuitivos tienen tanto o más fuerza que las definiciones formales. A partir de Dirichlet, a causa del desarrollo del álgebra, el concepto de función alcanzó niveles de abstracción más altos y de mayor generalización, sin embargo, nuestro interés es presentar esta noción ligada a los fenómenos de la naturaleza en una forma análoga a como se desarrolló en sus orígenes; es decir, ligado estrechamente a las aplicaciones.

El concepto de modelo. El concepto de modelo dinámico surgió con los trabajos experimentales de Galileo Gàlilei durante El Renacimiento europeo. Este gran sabio italiano fue el primero en idealizar un fenómeno y llevarlo a una fórmula matemática. Galileo descubrió la ley de la caida libre de los cuerpos ($s = \frac{1}{2}st^2$) después de plantearse algunas hipótesis y realizar cientos, quizás miles de mediciones, hasta lograr deducir la famosa ley. A partir de él los matemáticos, que en esa época eran al mismo tiempo filósofos, astrónomos, astrólogos y teólogos, se dedicaron con pasión a estudiar los fenómenos de la naturaleza utilizando la matemática. La matemática de los siglos XVI, XVII y XVIII, giró, casi toda, en torno a la noción de modelo. Sin tener siquiera una idea clara del concepto de función, que hoy nos parece tan importante, se inventó el Cálculo Diferencial e Integral y los científicos descubrieron una gran cantidad de leyes físicas que rigen nuestro universo cercano. Se desarrollaron las teorías del calor, de la dinámica, del electromagnetismo, de los gases, de la gravitación universal, etc. La matemática era la reina y al mismo sirvienta de otras disciplinas científicas y la mayoría de los matemáticos realizaban sus trabajos inmersos en los grandes problemas científicos y tecnológicos de su tiempo.

matemática que "modela" dicho fenómeno. Efectuado el experimento con un resorte cualquiera, las figuras siguientes muestran su estiramiento para diferentes pesos. Ver fig (1).

fig(1)

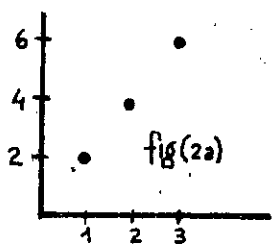


Se ve claramente que a medida que el peso "x" aumenta, el resorte sufre un estiramiento "y" cada vez mayor. A estas cantidades que varían se les llama **variables.** A la variable peso la llamaremos **variable independiente** y a la variable estiramiento, que depende del peso, la llamaremos **variable dependiente**. De las figuras se infiere lo siguiente:

1. El resorte no está sometido a peso y el estiramiento es cero.
2. El resorte está sometido al peso $x = 1kg$ y se estiró $y = 2,1cm$
3. El resorte está sometido al peso $x = 2kg$ y se estiró $y = 4,2cm$.
4. El resorte está sometido al peso $x = 3kg$ y se estiró $y = 6,3cm$

fig(2)

x	y
0	0
1	2,1
2	4,2
3	6,3



fig(2a)

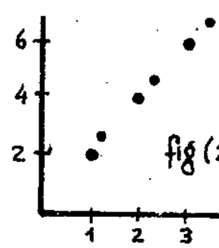


fig (2b)

Las figuras (2a) y (2b) muestran los gráficos de los datos de la tabla de la izquierda. Se observa que los puntos de dichos gráficos parecen pertenecer a una linea recta. Para asegurarnos de que dichos puntos pertenecen o no a una recta deberíamos tomar muchos más datos para ver, por ejemplo, cuanto se estira el resorte con pesos tales como 2,35 kg, 3,78 kg, 1,345 kg, etc. Sin embargo, en este caso ideal, podemos suponer que nuevas mediciones no harán más que confirmar la presunción de que el comportamiento del fenómeno es lineal, razón por la cual nos atrevemos a trazar una recta que pasa por ellos.

Se observa además, que el estiramiento del resorte es **directamente proporcional** al peso que se le cuelga; en efecto;

deformarse?. Al seguir colgando pesos cada vez mayores hallaríamos (probablemente) que el peso máximo "x" que soporta el resorte sin romperse ni deformarse es de 4,1 kg. En consecuencia el estiramiento máximo del resorte es de

$$y = 2,1 \cdot 4,1 = 8,61cm$$

Si nuestro experimento fuese real no haríamos más que confirmar todas nuestras presunciones. Los datos muestran que la variable "x" varía entre 0 y 4,1 kilogramos. En cambio la variable "y" varía entre 0 y 8,61 centímetros. Esta idea se expresa formalmente, desde el punto de vista matemático, en la forma siguiente:

a) El dominio de la función $y = 2,1x$ es el intervalo $[0, 4.1]$

b) El rango de la función $y = 2,1x$ es el intervalo $[0, 8.61]$

En símbolos escribimos que:

$$y : [0, 4.1] \longrightarrow [0, 8.1], \text{ tal que } y = 2,1x$$

Con frecuencia escribiremos $f(x) = 2,1x$ en vez de $y = 2,1x$, por lo tanto, en símbolos se tendrá:

$$f : [0, 4.1] \longrightarrow [0, 8.1], \text{ tal que } f(x) = 2,1x$$

A veces utilizaremos la notación Df y Rf para referirnos al dominio y rango de la función f respectivamente.

2.4 La función lineal

La función lineal $f(x) = 2,1x$ que modela el estiramiento del resorte es un caso particular de la función lineal:

$$f : I\!R \longrightarrow I\!R\,, \quad \text{tal que} \quad f(x) = mx + b$$

en que el DOMINIO es el conjunto de los Números Reales. El conjunto donde la función toma sus valores se llama CODOMINIO de la función. En el modelo del estiramiento del resorte el codominio es $I\!R$, por lo tanto el rango ó ámbito es un subconjunto del codominio.

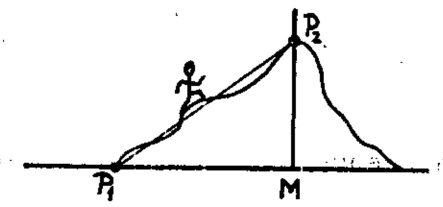
Ejemplo 1

El espacio recorrido por una partícula después de un cierto tiempo "t" es modelado por la función lineal $s(t) = 3 + 5t$, donde "t" está dado en segundos

A esta medida la llamaremos, en lo sucesivo, PENDIENTE DE LA RECTA. Podemos escribir que en el tramo de P_1 a P_2 del camino, la pendiente es:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{distancia de M a } P_2}{\text{distancia de M a } P_1}$$

fig(4)



La figura (5) nos muestra una recta con dos puntos sobre ella, cuyas coordenadas son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. De acuerdo a lo dicho la pendiente de la recta, que en adelante llamaremos m, está dada por la expresión:

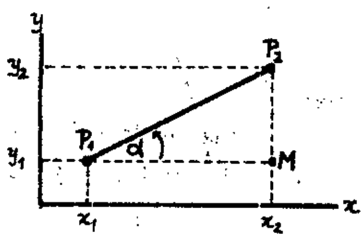
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observe, en la figura (5), que si el ángulo de inclinación de la recta P_1P_2 es α, entonces:

$$m = tg\ \alpha = \frac{MP_2}{MP_1}$$

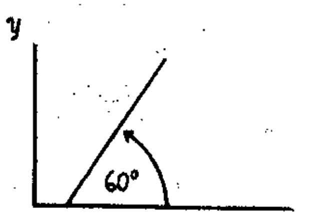
En consecuencia la pendiente de la recta P_1P_2 se puede obtener también calculando la tangente del ángulo de inclinación.

fig(5)

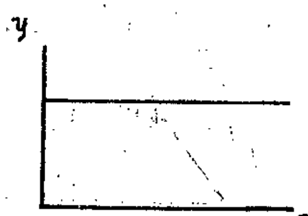


Cuando trazamos una recta en el sistema cartesiano de coordenadas, dicha recta forma un ángulo con el eje x. El menor ángulo que forma la recta, medido desde el eje hasta la recta, se llama ángulo de inclinación de la recta. Si la recta es paralela al eje x, entonces su inclinación es cero. En las figuras (6) y (7), los ángulos de inclinación son de 60^0, 0^0 respectivamente.

fig(6)



fig(7)



Ejemplo 4

Calcule la pendiente de una recta cuyo ángulo de inclinación es de 135^0.

SOLUCIÓN. Puesto que la pendiente de la recta es igual a la tangente del ángulo de inclinación, resulta:

$$m = tg\ 135^0 = -tg\ 45^0 = -1$$

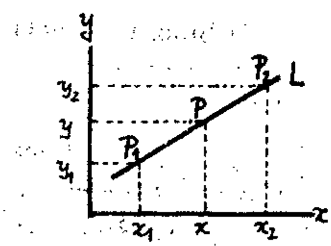
Usted puede verificar con una calculadora manual que $tg\ 135^0 = -1$. De los cálculos se desprende que si la recta "sube" o "asciende", entonces la pendiente es positiva. En cambio si la recta "baja" o "desciende" entonces tiene pendiente negativa.

Finalmente hacemos notar que cuando el ángulo de inclinación es mayor de 90^0 y menor que 180^0 la pendiente es negativa. En capítulos posteriores discutiremos con más detalle algunos aspectos trigonométricos relativos a la tangente de un ángulo.

En general si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos de una recta y "alfa" es el ángulo de inclinación de dicha recta, entonces:

$$tg\ \alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Dados dos puntos la ecuación de la recta queda completamente determinada, de tal modo que podemos preguntarnos lo siguiente: ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos ?
En la figura (10) los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P(x, y)$ y $P_2(x_2, y_2)$ están sobre la recta L.



fig(10)

Observe que la pendiente del segmento de recta P_1P_2 es:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y la pendiente del segmento de recta P_1P es:

$$m_2 = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Las figuras (11) y (12) muestran las posiciones de las rectas que pasan por el origen en los casos en que sus pendientes son negativas y positivas respectivamente.

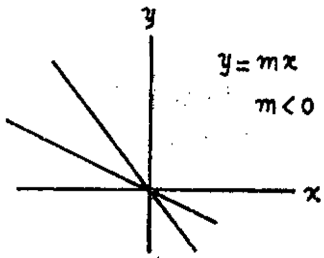


fig (11)

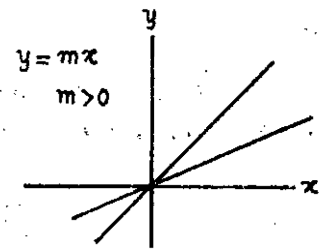


fig (12)

Ejemplo 6

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto (0,6) y que tiene pendiemnte $m = -2$.

Solución. Puesto que la pendiente "m" es dada, para hallar la ecuación pedida es suficiente determinar el valor de "b". Por otra parte como el punto (0,6) satisface la ecuación de la recta $y = mx + b$, si reemplazamos los valores de las coordenadas x e y de dicho punto en la ecuación podemos, obtener el valor de "b". En efecto:

$$6 = (-2) \cdot 0 + b, \text{ es decir } b = 6$$

A veces la ecuación (2) se escribe en la forma:

$$(3) \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

que se denomina con, frecuencia, ECUACIÓN FORMA PUNTO PENDIENTE

Ejemplo 7

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3,4)$ y que tiene pendiente $m = -2$.

Solución. Reemplazando las coordenadas del punto y la pendiente en la ecuación (3) resulta:

$$y - 4 = -2(x - 3) \iff y - 4 = -2x + 6 \iff y = -2x + 10$$

Usted puede comprobar fácilmente que la recta de la figura (15) que pasa por los puntos (3,-2) y (5,-2) también tiene pendiente cero, cuestión que está de acuerdo con la idea intuitiva de pendiente esbozada en párrafos anteriores.

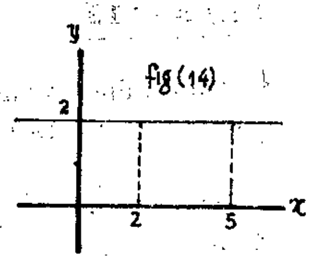


fig (14)

Si la pendiente de la recta paralela al eje x es cero, su ecuación es:

$$y = 0 \cdot x + b \iff y = b$$

Es claro que si $b > 0$, la recta está situada sobre el eje x. En cambio si $b < 0$, la recta está situada bajo el eje x.

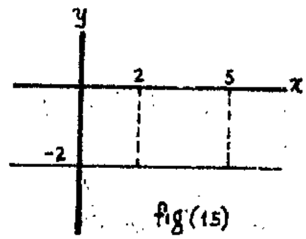


fig (15)

Ejemplo 10

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0, -3)$ y que es paralela al eje de las x?

SOLUCIÓN. Puesto que la recta es paralela al eje x y pasa por el punto $A(0, -3)$, su ecuación es $y = -3$.

¿ Cómo decidir cuando dos rectas son paralelas ?

Dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente. En la figura (16) las rectas L_1 y L_2 tienen la misma pendiente, por lo tanto son paralelas.

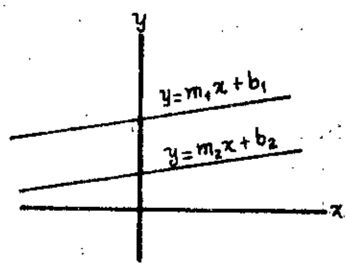


fig (16)

Ejemplo 11

Las rectas cuyas ecuaciones son $y = x$, $y = x + 1$ tienen la misma pendiente $m_1 = m_2 = 1$, en consecuencia dichas rectas son paralelas. La figura (17) muestra el gráfico de ambas rectas.

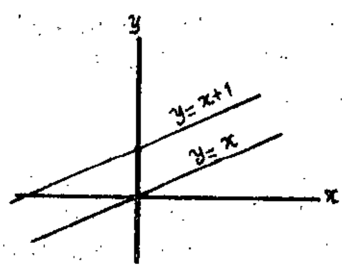


fig (17)

Observemos que el concepto de pendiente, para esta recta, no está definida. En efecto, si calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B, se obtiene:

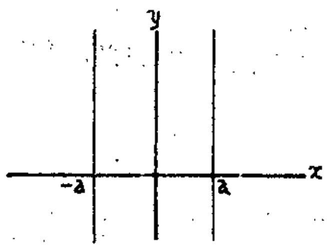
$$m = \frac{3-2}{2-2} = \frac{2}{0}$$

un número dividido por cero; fracción que sabemos no tiene sentido.

Desde el punto de vista intuitivo parece natural pensar en la imposibilidad de hablar de pendiente cuando nos referimos, por ejemplo, a una muralla perpendicular al suelo horizontal. Sin embargo podemos definir la ecuación de la recta perpendicular al eje x, sin necesidad de hacer uso del concepto de pendiente. En general la recta que corta al eje x perpendicularmente y que pasa por el punto $A(a, 0)$ tiene por ecuación la expresión:

$$x = a$$

Si $a > 0$ la recta está a la derecha del eje Y. Si $a < 0$, la recta está a la izquierda del mismo eje. La figura (20) muestra el gráfico de la ecuación $x = -a$ y $x = a$



Ejemplo 14

fig(20)

Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-3, 0)$ y es perpendicular al eje X.

SOLUCIÓN. De acuerdo a lo dicho, la ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 0)$ y es perpendicular al eje X es $x = -3$.

2.5.5 Sistema de ecuaciones lineales.

En la figura (21) se han trazado las rectas $y = -2x + 4$ y $y = x + 2$. Observemos que estas rectas se cortan en el punto $P_0(x_0, y_0)$. Parece obvio que si P_0 pertenece a ambas rectas, dicho punto debe satisfacer ambas ecuaciones simultaneamente.

el movimiento de ambas partículas. Puesto que se busca el instante "t" en que las velocidades son iguales, le imponemos esta condición a las velocidades. En efecto:

$$\text{si } v_1 = v_2 \text{ entonces } -2t + 20 = t + 2$$

De lo cual resulta que:

$$3t = 18 \text{ es decir, } t = 6$$

Esto significa que en la sexta hora de iniciado el movimiento las partículas tendrán la misma velocidad. Para determinar ahora cuál es esa velocidad reemplazamos $t = 6$ en cualesquiera de las ecuaciones dadas. Si lo hacemos en v_1, tenemos:

$$v_1 = -2(6) + 20 = -12 + 20 = 8$$

En consecuencia en la sexta hora las partículas llevaban ambas una velocidad de $8 \frac{km}{hr}$.

Resolver el problema anterior es equivalente a resolver el sistema formado por dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, esto es, resolver el sistema:

$$\begin{cases} v + 2t &= 20 \\ v - t &= 2 \end{cases}$$

Desde el punto de vista gráfico significa hallar el punto donde las dos rectas tienen un punto en común, esto es, hallar el punto donde las dos rectas se cortan.

Otra forma de resolver el sistema es mediante el llamado **Método de redución** o de **Suma y resta.** Dicho método consiste en multiplicar cada ecuación por un número escogido adecuadamente, de tal modo que al sumar o restar las ecuaciones se pueda eliminar una de las incognitas. En nuestro ejemplo, si multiplicamos la segunda ecuación por 2 y la sumamos con la primera, podemos hallar fácilmente el valor de v. En efecto:

$$\begin{cases} v + 2t &= 20 \\ v - t &= 2 \quad / \cdot 2 \end{cases}$$

Es decir

$$\begin{cases} v + 2t &= 20 \\ 2v - 2t &= 4 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se elimina la incognita t y resulta la ecuación en la variable v:

$$3v = 24 \iff v = 8$$

Puesto que en el triángulo rectángulo ABC conocemos la longitud de los catetos BC y AC, utilizando el teorema de pitágoras podemos hallar la longitud de la hipotenusa AB. En efecto, resulta que:

$$d^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2, \quad \text{de donde resulta}$$

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

que llamaremos **fórmula de la distancia entre dos puntos.**

Ejemplo 17

Halle la distancia entre los puntos $A(1,3)$ y $B(5,6)$.

SOLUCIÓN. Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos se obtiene:

$$d = \sqrt{(6-3)^2 + (5-1)^2} \iff \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

En consecuwncia la distancia entre los dos puntos es de 5 unidades.

2.7 Distancia de un punto a una recta

Una ecuación de primer grado en las variables x e y de la forma $Ax+By+C=0$, donde A, B y C son constantes arbitrarias se llama **Ecuación General de la Recta.**

Sea P un punto fuera de la recta $Ax + By + C = 0$, tal como muestra la figura (24). La distancia "d" de dicha recta al punto P, está dada por:

$$d = \frac{|Ax_0 + by_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Conviene aclarar que la distancia "d" del punto a la recta es la longitud del segmento de recta más corto que va desde el punto a la recta. Obviamente dicho segmento es perpendicular a la recta dada.

una recta L cuya ecuación es:

$$y = ax + b$$

el criterio se reduce a determinar los "parámetros" **a** y **b** de manera que la suma de los cuadrados de las desviaciones sea lo menor posible, fig (26). Para resolver matemáticamente este problema debemos minimizar una función de varias variables y obtener las llamadas **ecuaciones normales** que son las que nos permitirán hallar dichos parámetros. La obtención por vía matemática de las ecuaciones normales está muy lejos de nuestros intereses presentes y por lo tanto nos contentaremos sólamente con aplicarlas.

Ejemplo 19

La siguiente es una tabla de valores producto de la observación de un cierto fenómeno:

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

Ajuste una recta de mínimos cuadrados a los datos de este problema.

SOLUCIÓN. La ecuación de la recta buscada es $y = a_0 + a_1x$ y las ecuaciones normales que nos ayudarán a determinar los parámetros a_0 y a_1 son:

$$\begin{cases} \sum Y &= a_0N + a_1\sum X \\ \sum XY &= a_0\sum X + a_1\sum X^2 \end{cases}$$

donde:

1. N es el número de puntos de observación
2. $\sum Y$ es la suma de las ordenadas de los puntos
3. $\sum X$ es la suma de las abcisas de los puntos
4. $\sum XY$ es la suma del producto de cada una de las abcisas con su respectiva ordenada.
5. $\sum X^2$ es la suma de los cuadrados de las abcisas

El cálculo de las sumas puede ordenarse como se indica en la tabla siguiente:

Ejemplo 20

La tabla siguiente muestra la distribución de accidentes mineros, con resultado de muerte, en los seis primeros meses del año 1992, en la Región de Atacama.

x: mes	1	2	3	4	5	6
y: muertos	3	2	4	5	3	3

a) Construya el diagrama de dispersión de los datos (gráfico de los puntos)

b) Ajuste y trace una recta de mínimos cuadrados a dichos datos.

c) Estime el número de muertos que habrían en el mes de diciembre.

SOLUCIÓN. Recordemos que la ecuación de la recta buscada es $y = a_0 + a_1x$ y las ecuaciones normales en función de los parámetros a_0 y a_1 son:

$$\begin{cases} \sum Y = a_0N + a_1\sum X \\ \sum XY = a_0\sum X + a_1\sum X^2 \end{cases}$$

Ordenamos el cálculo de las sumas en la tabla siguiente:

X	Y	X^2	XY
1	3	1	3
2	2	4	4
3	4	9	12
4	5	16	20
5	3	25	15
6	3	36	18
$\sum X = 21$	$\sum Y = 20$	$\sum X^2 = 91$	$\sum XY = 72$

Puesto que N=6 resulta que las ecuaciones normales son:

$$\begin{cases} 6a_0 + 21a_1 = 20 \\ 21a_0 + 91a_1 = 72 \end{cases}$$

Las soluciones aproximadas son: $a_0 = 2,93$ y $a_1 = 0,11$ aproximadamente. Por lo tanto la recta de ajuste tiene por ecuación:

$$y = 2,93 + 0,11x$$

2.9 La función valor absoluto

Llamaremos función valor absoluto de "x" a la función $f(x) = |x|$ definida por:

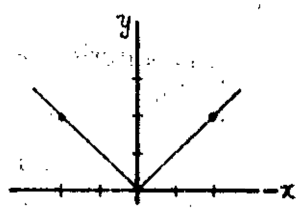
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

cuyos dominio y codominio es el conjunto de los números reales. Escribimos también:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad f(x) = |x|$$

De la definición resulta que el gráfico de la función $y = |x|$ está representado por las semirrectas: $y = -x$ en el intervalo $]-\infty, 0]$ y $y = x$ en el intervalo $]0, +\infty[$. El gráfico de esta función es el de la figura (29)

fig (29)



Observe que, de acuerdo a la definición, el ámbito de la función es $\mathbb{R}^+ \cup 0$.

Ejemplo 22

Trace el gráfico de la función $f(x) = |x - 2| - 10$

SOLUCIÓN. Aplicando la definición de valor absoluto se tiene que:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x - 2 \geq 0 \\ -x + 2 & \text{si } x - 2 < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$|x - 2| - 10 = \begin{cases} x - 2 - 10 & \text{si } x \geq 2 \\ -x + 2 - 10 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

En consecuencia las rectas que debemos trazar son las siguientes:

a) $y = x - 12$ si $x \in [2, +\infty[$

b) $y = -x - 8$ si $x \in]-\infty, 2[$

a) $A(2,-3)$ y $B(4,2)$ sol. $5x-2y-16=0$
b) $C(-4,1)$ y $D(3,-5)$ sol. $6x+7y+17=0$
c) $E(-5,2)$ y $F(3,2)$ sol. $y-2=0$

3. En el triángulo de vértices $A(-5,6)$, $B(-1,-4)$ y $C(3,2)$, hallar las ecuaciones y el punto de intersección de sus medianas.

   i) sol. $7x+6y-1=0$ ii) sol. $x+1=0$ iii) sol. $x-6y+9=0$ y $P(-1,\frac{4}{3})$.

4. Hallar las ecuaciones de las alturas y el punto de intersección del triángulo del problema 3.

5. Demostrar que los segmentos de recta que unen los puntos $A(-5,3)$, $B(6,0)$, $C(5,5)$ forman un triángulo rectángulo.

6. Hallar el área del triángulo ABC del ejercicio anterior.

7. Hallar la distancia entre los pares de puntos que se indican: a) $A(3,8)$ y $B(-2,7)$ b) $C(-1,-1)$ y $D(0,0)$ c) $E(\sqrt{2},\sqrt{3})$ y $F(4,4)$.

8. Demostrar que los puntos $A(2,3)$, $B(3,5)$, $C(-2,7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

9. Determine si las rectas que pasan por los pares de puntos que se indican son paralelas o perpendiculares entre si:

   a) $(6,-1)$ y $(4,3)$ b) $(-5,2)$ y $(-7,6)$
   c) $(-3,9)$ y $(4,4)$ d) $(9,-1)$ y $(4,-8)$
   e) $(-1,-4)$ y $(2,3)$ e) $(-5,2)$ y $(-19,8)$

10. Determine el valor de "k" si:

    a) La distancia entre los puntos $A(-1,3)$ y $B(11,k)$ es 13
    b) La distancia entre $C(k,0)$ y $D(0,2k)$ es 10
    c) Los puntos $E(6,-1)$ y $F(3,k)$ y $G(-3,7)$ están todos en la misma recta.

11. Demostrar que los puntos $A(2,3)$, $B(4,9)$ y $C(-2,7)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

12. Demostrar que los puntos $A(3,2)$, $B(7,3)$, $C(-1,-3)$ y $D(3,-2)$ son los vértices de un paralelogramo.

13. Demostrar que los puntos $A(-5,6)$, $B(0,8)$, $C(-3,1)$ y $D(2,3)$ son los vértices de un cuadrado.

21. Resuelva el siguiente acertijo: hallar una fracción sabiendo que si el numerador se aumenta en 2 y el denominador en 1, se obtiene $\frac{1}{2}$. Y si el numerador se aumenta en 1 y se disminuye en 2, se obtiene $\frac{3}{5}$.

22. Halle un punto $P(x_0, y_0)$ sobre la recta $3x + y + 4 = 0$, que equidiste de los puntos $(-5, 6)$ y $(3, 2)$.

23. Demuestre que el triángulo de vértices $A(0, -1)$, $B(\sqrt{3}, 0)$ y $C(0, 1)$ es equilátero.

24. Demuestre que el punto $P(3, \frac{3}{2})$ está sobre la mediatríz del segmento determinado por $A(6, 2)$ y $B(0, 1)$.

25. Halle la longitud de las alturas del triángulo equilátero del problema 23.

26. Halle la longitud de las medianas del problema 3.

27. Si se enfría un gas bajo condiciones de volumen constante, se observa que la presión decrece en forma casi proporcional con la temperatura. Si así ocurre la temperatura teórica correspondiente a la ausencia de presión se denomina CERO ABSOLUTO. En un experimento elemental se obtuvieron los siguientes datos de la presión y la temperatura para un gas a volumen constante.

P; kilopascal	133	143	153	162	172	183
T: grados celsius	0.0	20	40	60	80	100

a) Halle la recta de mínimos cuadrados para P como una función de T.

b) Determine la presión para 55 grados celsius.

28. En un experimento se midió la resistencia de cierto resistor como una función de la temperatura. Los datos encontrados fueron los siguientes.

R; ohms	25.0	26.8	28.9	31.2	32.8	34.7
T: grados celsius	0.0	20.0	40.0	60.0	80.0	100

a) Halle la recta de mínimos cuadrados para estos datos expresando R como una función de T.

b) Dibuje la recta y la nube de puntos en la misma gráfica.

c) ¿ Cuál es, aproximadamente, la resistencia del resistor, si la temperatura sube hasta 118 grados ?

t	s
0	100 000
20	90 000
40	86 000
60	69 000
80	22 000
100	00 000

a) Utilice EL DERIVE para trazar una curva para los datos de la tabla. Determine el dominio y rango de la función para este fenómeno.

b) Estime, aproximadamente en el gráfico, el número de sobrevivientes a la edad de 35 años.

33. Construya el gráfico de las siguientes funciones:

$y = -x + |x+1|$ b) $y = |\frac{x}{3}| + |\frac{x-1}{2}|$ c) $y = 3|x-6| + 3x$

2.11 Ejercicios Propuestos.

Utilice El DERIVE para resolver los siguientes ejercicios.

1. El Departamento de Matemáticas de la Universidad de Atacama tomó una prueba de diagnóstico de matemática antes de iniciar el curso de Fundamentos de Matemática. Para analizar la confiabilidad de esta prueba, un estadístico tabuló dichas notas y las notas finales de 10 estudiantes, elegidos al azar, al terminar el curso. La tabla con los datos obtenidos es la siguiente:

Estudiante	Prueba de diagnóstico	Nota final del curso
A	60	81
B	33	40
C	22	33
D	17	35
E	70	70
F	45	68
G	12	43
H	56	75
I	76	78
J	12	45

2.12 El concepto de límite de una función es fundamental para comprender los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral. En lo que sigue utilizaremos EL DERIVE para estudiar dicho concepto.

¿Qué queremos decir con la palabra límite?. Supongamos que tenemos una función lineal cualquiera, por ejemplo, la función $y = 3x + 2$ y queremos saber que ocurre con los valores de la variable dependiente "y" cuando los valores de la variable independiente "x" se acercan 2. El lector se habrá dado cuenta que podemos acercarnos a 2 por su derecha, o por su izquierda. Si nos acercáramos a 2 por la izquierda, pordríamos tomar valores de x tales como: 1,9 ; 1,91; 1,95; 1,99, 1,999, etc. Si nos acercáramos a 2 por la derecha, podríamos tomar valores tales como: 2,2; 2,1; 2,09, 2,03, 2,001, 2,0001, etc. En ambos casos se puede verificar fácilmente que la variable "y" se acerca a 8. En tal caso decimos que el límite de la función, cuando x tiende a 2, es igual a 8. Notamos esto formalmente escribiendo que:

$$\lim_{x\to 2}(3x+2) = 8$$

Si calculamos el límite por izquierda, escribiremos:

$$\lim_{x\to 2^-}(3x+2) = 8$$

Si calculamos el límite por la derecha, escribimos:

$$\lim_{x\to 2^+}(3x+2) = 8$$

De acuerdo a estas consideraciones, utilice EL DERIVE para graficar las funciones respectivas y calcular los límites que se indican.

a) $\lim_{x\to 3^+}(x+9)$ *b)* $\lim_{x\to 0^-}(7x+12)$ *c)* $\lim_{x\to 1^-}(-3x+3)$ *d)* $\lim_{x\to 4^-} 12x$ *e)* $\lim_{x\to 0} x$

f) $\lim_{x\to -1^-}(9x-12)$ *g)* $\lim_{x\to -3^+}\frac{3x}{5}$ *h)* $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+}(3x-2)$ *i)* $\lim_{x\to -\frac{3}{4}} 3x$ *j)* $\lim_{x\to -\frac{6}{7}} 3x$

¿Cuál es el límite de las funciones cuando $x \longrightarrow +\infty$?

¿Cuál es el límite de las funciones cuando $x \longrightarrow -\infty$?

1. En Command : ponga el cursor en Declare y presione la tecla Enter.

2. Aparece Declare : Function, Variable, Matrix, Vector. Ponga el cursor en Matrix y presione la tecla Enter

3. Aparece Declare Matrix : Rows columns. Al lado derecho de Rows escriba 4 y al lado derecho de Columns escriba 2. Para pasar de uno a otro lado se usa el tabulador. Observe que los datos forman una matríz de 4 filas y dos columnas. Presione la tecla Enter

4. Aparece Matrix element: Escriba sucesivamente:

   1 Enter 1 Enter

   2 Enter 3 Enter

   4 Enter 5 Enter

   6 Enter 6 Enter

   En la parte superior de la pantalla aparece lo siguiente:

$$1: \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

   En la parte inferior aparece Command. Presione la tecla Enter.

5. Aparece Author expression: Escriba lo siguiente:

$$\text{fit } ([x, ax + b], \text{tecla } F_3)$$

   Presione la tecla Enter.

   En la parte superior de la pantalla aparece lo siguiente:

$$2 : Fit \left[x, ax + b], \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} \right]$$

4. Se pone el cursor en **Plot** y se presiona la tecla Enter.
5. Aparece Plot: Beside, Under, Overlay. Se coloca el cursor en Overlay y se presiona la tecla Enter.
6. En la parte superior aparece el sistema cartesiano de coordenadas y en parte inferior se está en Command:
7. Se realiza la siguiente sucesión de operaciones, poniendo el cursor donde se indica: a) Option Enter b) State Enter c) Rectangular Enter d) Plot Enter. En la pantalla aparece el gráfico de la función.

Observe que podemos tomar valores de x que se acerquen a 0,5 por su derecha o por su izquierda. Para realizar esto se pone el cursor, sobre el eje x, y se mueve desde valores menores que $0,5$ (y mayores que $0,5$) y se ve que, tanto si nos acercamos por la izquierda, como por la derecha, los valores de y se acercan a 0,5.

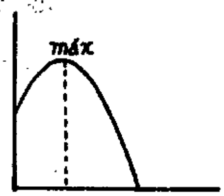
x	0,45833	0,48611	0,5	0,51388	0,54166
y	0,35937	0,43751	0,5	0,51562	0,57812

En consecuencia

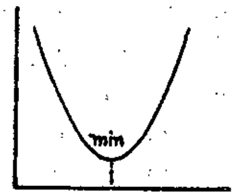
$$\lim_{x \to 0,5} = 0,5$$

En general, elgráfico de dos parábolas cualesquiera se representan en las figuras (3) y (4).

fig(3)



fig(4)



El punto donde la parábola alcanza su valor máximo o mínimo se llama vértice. En lo que sigue estudiaremos algunos fenómenos de la naturaleza que pueden ser modelados mediante esta función.

Ejemplo 1

La ley de la caída libre de los cuerpos nos permite calcular el espacio "s" recorrido por un cuerpo en caída libre, después de un cierto tiempo "t"; ley que se expresa en la forma:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

donde g es la constante de aceleración aproximadamente igual a $9,8\frac{m}{seg^2}$. Si suponemos que $g = 10\frac{m}{seg^2}$ la ley se expresaría mediante la función:

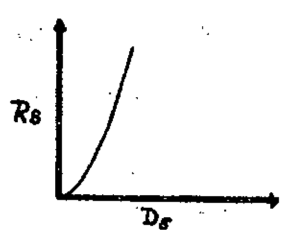
$$s(t) = 5t^2$$

En esta función la variable independiente es "t" y la variable dependiente es "s", y ambas están sometidas a restricciones. Observemos que para esta función no tienen sentido ni el tiempo ni la distancia negativa, por lo tanto su dominio y su rango son iguales al intervalo $[0, +\infty[$. En consecuencia podemos escribir:

$$s : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\text{ tal que } s(t) = 5t^2$$

El gráfico muestra que el dominio y rango se prolongan indefinidamente hacia la derecha y hacia arriba en cada eje respectivamente. Fig(5).

fig(5)

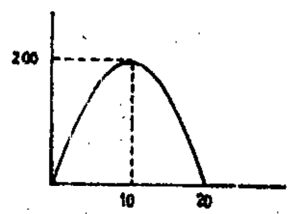


Hemos obtenido así la función cuadrática $A(x) = 40x - 2x^2$ que nos describe la variación del área "A" del rectángulo en función de sus lados. Ahora, a partir de esta función, intentaremos hallar los lados del rectángulo cuya área sea máxima.

La figura (9) muestra el gráfico aproximado de la función $A(x) = 40x - x^2$ que muestra el comportamiento del área del rectángulo en función de sus lados. Para construir el gráfico consideramos puntos arbitrarios del dominio de dicha función.

x: metros	0	5	8	10	12	15	20
A: área	0	150	192	200	192	150	0

fig(9)



Notemos que entre todos los valores del dominio de la función, es decir, en el intervalo [0,20], el valor máximo de "A" se halla en $x = 10$. Esto significa que cuando el lado menor del rectángulo mide 10 metros, la máxima área posible que se puede formar con los 40 metros de alambre es de $200m^2$. Puesto que el lado menor del rectángulo mide 10 metros, el lado mayor mide $40 - 2x = 20$ metros.

Note que en este fenómeno las variables están sometidas a restricciones. En efecto, la variable "x" varía en el intervalo cerrado $[0, 20]$, en cambio la variable "A" varía en el intervalo cerrado $[0, 200]$. Una descripción formal de la función modeladora es la siguiente:

$$A : [0, 20] \longrightarrow [0, 200] \quad \text{tal que} \quad A(x) = 40x - 2x^2$$

Ejemplo 3

Un objeto que es lanzado al aire se encuentra a la distancia "d" por encima del suelo horizontal según la función:

$$d(t) = 40t - 4t^2, \quad (\text{"t" en minutos y "d" en metros})$$

a) ¿ En qué momentos el objeto está en el suelo ?

iv) Es decir:

$$(1) \qquad y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right\}$$

Observe que si le damos un valor cualquiera a la variable "x" obtendremos un correspondiente valor de "y". Pero, ¿ Cuál es el valor de "x" que hace que "y" alcance, por ejemplo, su valor mínimo ?

Puesto que la cantidad $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ es mayor o igual que cero, la expresión del interior del paréntesis de llave tomará su menor valor cuando:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$ la función también tomará su menor valor en $x = -\frac{b}{2a}$. Este menor valor de la función es $\frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ y se llama **el mínimo de la función.** Es decir:

Si $a > 0$, entonces el vértice de la parábola es un mínimo

Por otra parte, si $a < 0$, la función toma su mayor valor en $x = -\frac{b}{2a}$. Este mayor valor es llamado **máximo de la función** y también es igual a $-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Esto es:

Si $a < 0$, entonces el vértice de la parábola es un máximo

En ambos casos el punto:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

es el vértice de la parábola.

Haremos incapié en el hecho siguiente:

Si denotamos con la letra griega Δ la expresión $b^2 - 4ac$, es decir:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

resulta que la función alcanza su valor mínimo ó máximo en el vértice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

La ecuación cuadrática. Alrededor de 3 000 años antes de Cristo los babilonios y egipcios ya conocían la ecuación cuadrática. El álgebra babilónica había alcanzado un estadio bastante desarrollado y algunos problemas propuestos por ellos conducían a ecuaciones de este tipo. En una tablilla de arcilla cocida de 6 000 años de antiguedad aparece planteado el siguiente problema: *"calcular la longitud del lado de un terreno cuya área menos el lado es igual a 870"*. Este enunciado, expresado en el lenguaje simbólico moderno conduce a la ecuación:

$$x^2 - x = 870$$

Conviene precisar, sin embargo, que estos pueblos no pensaron en la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. El interés por algunas de estas ecuaciones se debía a que en el planteamiento de determinados problemas prácticos se encontraban con expresiones de esta naturaleza.

Entre las preocupaciones de los griegos, después que heredaron el conocimiento de los pueblos del Antiguo Oriente alrededor de 1 000 años antes de Cristo, estuvo también la ecuación cuadrática. Así, por ejemplo, **Euclides (303-275 a.C)**, en el segundo libro de LOS ELEMENTOS, plantea el problema de: *"cortar una recta dada, de manera que el rectángulo comprendido entre la recta entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del otro segmento"*. Este es el famoso problema de la división de una recta en razones extrema y media o sección aurea que conduce a la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - ax + a^2 = 0$$

Los griegos le dieron gran importancia al estudio de las ecuaciones cuadráticas desde el punto de vista geométrico, en particular estudiaron formalmente las cónicas; curvas entre las cuales se halla la parábola. Entre los matemáticos y filósofos que se preocuparon de ellas estuvo **Arquímedes (287-212 a.C)**, Dositeo, Conon de Samos, Nicomedes, **Apolonio de Perga (190 a.C)**.

Desgraciadamente los griegos cometieron el error de no retomar el álgebra desarrollada por babilonios y egipcios y desecharon completamente esta rama de las matemáticas; tampoco llegaron a plantearse formalmente la solución de la ecuación general de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La cultura griega declinó alrededor del año 400 después de Cristo y todos sus conocimientos pasaron a manos de los árabes alrededor del año 700 de nuestra era. Los chinos y los indios, alrededor del año 600 después de Cristo, también se cuadrática está en la mente de los matemáticos, sin embargo, aún no se define claramente el concepto de función; esto ocurrirá recién en el siglo XIX.

Parece claro que la noción de función surge cuando la matemática inicia el difícil camino de estudiar los fenómenos de la naturaleza. Los trabajos de **Johannes Kepler (1571-1630)**, del mismo Galileo, de **Isaaac Newton (1641-1727)** de **Gotfried Leibniz (1646- 1716)** y de muchos otros, hicieron posible analizar los fenómenos relativos al movimiento, cuestión que contribuyó significativamente a desarrollar la noción intuitiva de función. Un par de siglos después de Tartaglia y galileo, el alemán **Gustavo Dirichlet (1805-1859)**, definió el concepto de función en la forma siguiente: *"una cantidad variable "y" es función de una cantidad variable "x", si a cada valor de x le corresponde un único valor de y"*. Años más tarde, cuando surgió la Teoría de Conjuntos, se le agregaría a la definición, las palabras "a cada valor de x perteneciendo a un conjunto".

Ahora estamos en condiciones de resolver completamente el ejemplo 3. En efecto:

a) El objeto está en el suelo en el instante en que la distancia "d" es cero. Esto significa que debemos resolver la ecuación $d(t) = 40t - 4t^2 = 0$; ecuación que podemos resolver mediante la fórmula (6). Sin embargo, en este caso, resulta más sencillo factorizar la expresión $40t - 4t^2 = 0$. Resulta entonces que:

$$40t - 4t^2 = 4t(10 - t) = 0 \iff t = 0 \quad o \quad t = 10$$

Por lo tanto, el objeto está en el suelo en el momento de ser lanzado al aire, es decir en $t = 0$, y también en el momento de llegar al suelo, es decir, 10 minutos después del lanzamiento.

b) El objeto alcanza su máxima altura en el punto de máximo $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ Observemos que en la función $s = 40t - 4t^2$ el coeficiente $a = -4$, el coeficiente $b = 40$ y el término constante $c = 0$. Por lo tanto

$$\Delta = b^2 - 4ac = 40^2 - 4(-4) \cdot 0 = 1600$$

En consecuencia:

$$V(-\frac{40}{-8}, -\frac{1600}{-16}) = V(5; 100)$$

Esto significa que la altura máxima se alcanza en el quinto minuto después del lanzamiento y es igual a 100 metros.

b) El punto donde la parábola corta al eje y.

c) El punto de máximo o de mínimo.

d) Algunos puntos arbitrarios para completar la tabla de datos.

a) Para determinar los puntos donde la parábola corta al eje x, debemos resolver la ecuación:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Mediante la fórmula (6). Puesto que $a = 1$, $b = -2$ y $c = -3$, resulta que

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

En consecuencia las raíces de la ecuación son:

$$x = 3 \quad y \quad x = -1$$

b) Para hallar el punto donde la parábola corta al eje y, hacemos $x = 0$ en la ecuación $y = x^2 - 2x - 3$. Resulta que:

$$\text{si } x = 0, \text{ entonces } y = -3$$

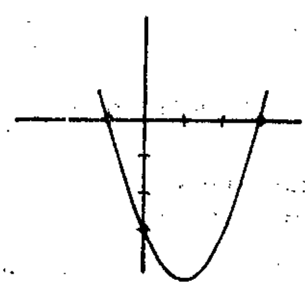
c) Puesto que en la función $y = x^2 - 2x - 3$ el coeficiente $a = 1$, el vértice de la parábola es un punto de mínimo. Si $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$, entonces:

$$V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = V(\frac{2}{2}, -\frac{16}{4}) = V(1, -4)$$

Finalmente construimos una tabla de datos y determinamos otros puntos adicionales para trazar nuestro gráfico.

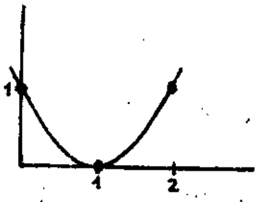
x	y
−2	−1
−1	0
0	−3
1	−4
2	−3
3	0
4	5

fig(13)



x	y
0	1
1	2
2	1
1	0

fig(14)



Con frecuencia se destaca en la parábola la recta perpendicular al eje x que pasa por su vértice. Observe que la parábola es simétrica respecto de este eje y por tal razón se le llama **eje de simetría.** En este caso la ecuación del eje de simetría es $x = 1$. Fig(14)

Ejemplo 6

Trace el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 4x + 5$

SOLUCIÓN. i) En este caso $a = 1$, $b = 4$ y $c = 5$. En consecuencia el discriminante es $b^2 - 4ac = 16 - 4(5) = -4 < 0$ y, por lo tanto, la ecuación no tiene raíces reales. Esto significa que la parábola no corta al eje x.

ii) El vértice de la parábola es:

$$V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = V(-2, 1)$$

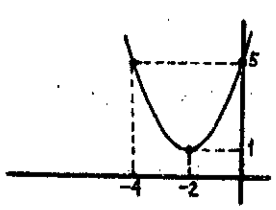
Y puesto que $a = 1 > 0$, dicho vértice es un mínimo.

Por otra parte, cuando $x = 0$, entonces $y = 5$, en consecuencia la parábola corta al eje y en el punto $P(0, 5)$.

Una tabla de datos para la parábola de la fig(15) es la siguiente:

x	y
-4	5
-2	1
0	5

fig(15)



Observe que el eje de simetría de la parábola está dado por la ecuación $x = -2$.

ii) El vértice de la parábola es:

$$V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$$

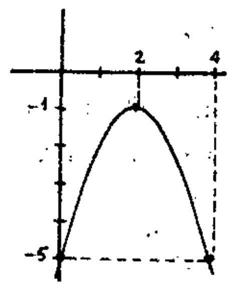
Y puesto que $a = -1 < 0$, la parábola tiene un punto de máximo en dicho vértice.

Finalmente, si $x = 0$, entonces $y = -5$; en consecuencia la parábola corta al eje y en el punto $P(0, -5)$

Una tabla de datos para la parábola de la figura 17, es la siguiente:

x	y
0	−5
2	−1
4	−5

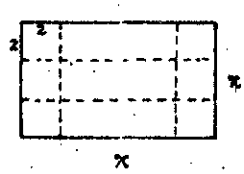
fig(17)



Ejemplo 9

De una pieza de hojalata a la cual se le cortaron cuadrados de 2 centímetros por lado en cada esquina, se hizo una caja sin tapa de 24 cm^3 de volumen. Halle las dimensiones de dicha pieza. El esquema siguiente muestra las condiciones del problema.

fig(18)



SOLUCIÓN. Si la dimensión de uno de los lados de la pieza de hojalata es "x", entonces el volumen de la caja es:

$$V = 2(x - 4)(x - 4) = 24$$

En consecuencia para determinar las dimensiones que andamos buscando debemos resolver dicha ecuación. Se ve que $2(x-4)^2 = 24$, por lo tanto:

$$x - 4 = \pm\sqrt{12} \iff x_1 = 4 + 2\sqrt{3} \;\text{ y }\; x_2 = 4 - 2\sqrt{3}$$

3.4 De las raíces de la ecuación.

Conviene que digamos algunas cosas más acerca de la ecuación de segundo grado en relación con las propiedades de sus raíces. Hemos dicho que el caracter de las raíces de dicha ecuación viene determinado por el discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

El gran matemático francés **Francisco Vietta (1540-1603)** al estudiar detalladamente las ecuaciones de segundo grado, halló ciertas relaciones entre sus coeficientes y sus raíces. Así, por ejemplo, demostró que la suma entre las raíces es igual a: "menos el cociente entre el coeficiente de la incognita en primer grado y el coeficiente de la incognita en segundo grado". Esto es:

$$s = -\frac{b}{a}$$

Demostró también que: "el producto entre sus raíces es igual al cociente entre el término constante y el coeficiente de la incognita de primer grado. Es decir:

$$p = \frac{c}{a}$$

Por ejemplo, en la la ecuación $3x^2 + 8x - 7 = 0$, sus raíces deben satisfacer las siguientes relaciones:

$$x_1 + x_2 = -\frac{8}{3} \quad y \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{7}{3}$$

Ejemplo 11

Determine las raíces de la ecuación de segundo grado sabiendo que su suma es igual a 5 y su producto es igual a 6.

Solución. Suponiendo que las raíces de la ecuación son x_1 y x_2. las condiciones del problema conducen al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 5 \\ x_1 \cdot x_2 & = & 6 \end{cases}$$

Despejando x_2 de la primera ecuación y reemplazándola en la segunda ecuación se obtiene la ecuación cuadrática:

$$x_1^2 - 5x_1 + 6 = 0$$

$$\text{si} \quad m = 7, \quad \text{la ecuación es} \quad 7x^2 - 8x + 12 = 0$$

De tal modo que para una infinidad de valores de "m" existirán una infinidad de ecuaciones, que pueden tener dos raíces reales y distintas, o no tener raíces reales.

Sin embargo, ¿ cómo determinar el conjunto de valores entre los cuales varía el parámetro "m" de manera que la ecuación tenga siempre dos raíces reales y distintas ?

Recordemos que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos raíces reales y distintas cuando el discriminante $b^2 - 4ac > 0$. Aplicándole al discriminante la condición de que sea mayor que cero, se tiene que:

$$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(m)(12) = 64 - 48m > 0$$

Si resolvemos la inecuación $64 - 48m > 0$ obtendremos todos los valores de "m" que harán que la ecuación satisfaga la condición pedida. En efecto:

$$64 - 48m > 0 \iff 48m < 64 \iff m < \frac{64}{48} = \frac{4}{3}$$

En consecuencia cada vez que $m \in]-\infty, \frac{4}{3}[$, la ecuación $mx^2 - 8x + 12 = 0$ tendrá dos raíces reales y distintas. Usted puede verificar este hecho tomando algunos valores de "m" de este intervalo.

Ejemplo 15

Determine el parámetro "m" de manera que la ecuación $mx^2 - 6x + 8 = 0$ tenga una única raíz (dos raíces reales e iguales).

SOLUCIÓN. Para que la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ tenga una única raíz, debemos imponerle al discriminante $b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(m)(8) = 36 - 32m$ la condición de que sea igual a cero. Esto es:

$$36 - 32m = 0 \iff 32m = 36 \iff m = \frac{36}{32} = \frac{9}{8}$$

Por lo tanto, la ecuación propuesta tendrá una única solución si $m = \frac{9}{8}$.

3.5 La parábola pasa por tres puntos

¿Qué hacer cuando se obtienen experimentalmente tres puntos que parecen estar sobre una parábola? En realidad dados tres puntos existe una única parábola que pasa por ellos.

En consecuencia la ecuación de la parábola que pasa por los puntos dados es:

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2$$

3.6 La parábola de mínimos cuadrados

Si los puntos experimentales son más de tres y queremos aproximarlos mediante una parábola, lo más seguro es que algunos de ellos se queden por fuera. En esta situación, la mejor aproximación se puede obtener también mediante el método de los mínimos cuadrados.

La parábola de aproximación de mínimos cuadrados de la serie de puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2),...(x_n, y_n) tiene por ecuación a:

$$(7) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad .$$

donde las constantes a_0, a_1 y a_2 se determinen resolviendo el sistema de ecuaciones siguientes:

$$(8) \qquad \begin{cases} \sum y &= a_0 N &+ a_1 \sum x &+ a_2 \sum x^2 \\ \sum x \cdot y &= a_0 \sum x &+ a_1 \sum x^2 &+ a_2 \sum x^3 \\ \sum x^2 y &= a_0 \sum x^2 &+ a_1 \sum x^3 &+ a_2 \sum x^4 \end{cases}$$

que son las ecuaciones normales para la parábola de mínimos cuadrados. Observe que las ecuaciones del sistema (8) se obtienen multiplicando por 1, x y x^2 respectivamente, la ecuación (7); teniendo en cuenta las sumas y el factor N de a_0.

Ejemplo 18

Halle la parábola de mínimos cuadrados que pasa por los puntos $A(0,0)$ $B(-1,1)$, $C(0,2)$ y $D(2,0)$.

Con los puntos dados se construye la siguiente tabla de valores:

x	0	−1	0	2
y	0	1	2	0

$$\begin{cases} -342a_1 & - & 414a_2 & = & 126 \\ 342a_1 & + & 342a_2 & = & -114 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene la ecuación:

$$-72a_2 = 12 \iff a_2 = -\frac{12}{72} = -\frac{1}{6}$$

Reemplazando este valor de a_2 en la ecuación $19a_1 + 23a_2 = -7$ se obtiene:

$$19a_1 + 23(-\frac{1}{6}) = -7 \iff 19a_1 - \frac{23}{6} = -7 \iff 19a_1 = -7 + \frac{23}{6} = \frac{19}{6}$$

En consecuencia

$$a_1 = \frac{19}{6 \cdot -19} = -\frac{1}{6}$$

Para hallar a_0 podemos reemplazar $a_1 = \frac{1}{6}$ y $a_2 = -\frac{1}{6}$ en cualesquiera de las tres ecuaciones del sistema del sistema inicial. Si lo hacemos en la primera, se obtiene:

$$4a_0 - \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = 3 \iff 4a_0 = 4$$

Por lo tanto resulta que:

$$a_0 = \frac{4}{4} = 1$$

Luego, si $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{6}$ y $a_2 = -\frac{1}{6}$, la ecuación buscada es:

$$y = 1 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}x^2$$

3.7 Ejercicios propuestos

1. Resuelva las siguientes ecuaciones cauadráticas y compruebe sus resultados.

   a) $2x^2 + 5x - 12 = 0$ *b*) $x^2 + x - 1 = 0$ *c*) $4x^2 - 2x = 7$ *d*) $x(x-1) = 0$

2. Considere las ecuaciones de las parábolas siguientes:

   a) $y = x^2 - x + 2$ *b*) $y = x^2 - 4$ *c*) $y = (x-1)^2 - 5x + 12$

   y trace su gráfico considerando previamente:

donde la variable $N(t)$ indica la cantidad de hormigas (por miles) y la variable t indica el tiempo transcurrido en meses.

a) ¿ Cuál es la población inicial en esta experiencia ?

b) ¿ En qué instante se extinguió completamente la población ?

c) ¿ En qué instante la población alcanzó la mayor cantidad de individuos ?

d) ¿ En qué instante la población alcanzó 150 hormigas ?

e) ¿ Cuántas hormigas quedaban vivas en el vigésimo segundo día ?

f) ¿ Cuál es el dominio y rango en este fenómeno ?

7. El producto de dos enteros consecutivos es 72, halle dichos números.

8. La suma de un número y su recíproco es 12, ¿ cuál es el número ?

9. Construya un gráfico con la parábola $y = -2x^2 + 12x - 14$ y la recta $y = x - 3$ y halle el punto de intersección de ambas curvas.

10. Un campesino que dispone de 160 metros desea cercar una superficie de terreno de forma rectangular. Si uno de los lados no necesita cerco, ¿ cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que su área sea máxima ?

11. Bajo ciertas condiciones una compañía comercial encuentra que la utilidad P al producir x artículos de un cierto producto es:

$$P(x) = 90x - x^2 + 1000$$

a) Construya una tabla de valores y el gráfico de la función modeladora.

b) Calcule, utilizando la tabla, cuál es la utilidad máxima.

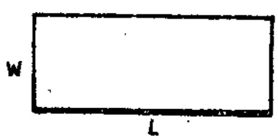
c) ¿ Para que valores de x la utilidad es nula ?

d) ¿ Cuál es el dominio y rango de la función, para este fenómeno ?

12. La parcela rectangular de la figura 19 tiene un perímetro de 600 metros y su área en función del ancho w es:

$$A(w) = 300w - w^2$$

fig(19)



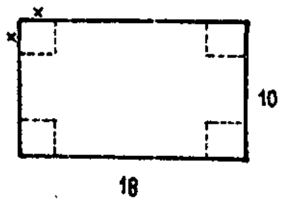
2L + 2W = 600

a) Determine el área de manera que el área encerrada por dicho perímetro sea máxima.

Calcule la longitud del segmento de modo que uniendo los cuatro puntos se obtenga un paralelogramo de área mínima. Fig(22)

16. La figura 23 muestra el corte que se le debe hacer, en las esquinas, a una pieza de carton para construir una caja de volumen V, con las dimensiones que se indican.

fig(23)



Determine x de manera que el volumen de la caja sea máxima.

17. En el triángulo equilátero ABC de 5 cm de lado se inscribe otro triángulo equilátero DEF. ¿ En qué caso el área del triángulo DEF es mínima ?

18. Se determina que el costo en pesos, por kilómetro, del viaje en taxi a una velocidad de x kilómetros por hora está dado por:

$$c(x) = 0,118x^2 - 1,44x + 40$$

¿ Cuál debe ser la velocidad del taxi para que el costo por kilómetro sea mínimo ?

19. Determine la ecuación de las parábolas que pasan por los puntos que se indican.

a) $A(1,1)$, $B(0,3)$ y $C(-3,-4)$ b) $A(-1,-1)$, $B(0,-8)$ y $C(-1,3)$

20. Determine la parábola de mínimos cuadrados que pasa por los puntos $A(-1,0)$, $B(0,3)$, $B(1,\frac{3}{2})$ y $C(4,0)$.

21. Una observación sobre el crecimiento de una población inicial de moscas de la fruta dio la siguiente tabla de datos:

t: meses	0	2	4	5
N(t): millones	2	2,7	5,1	10

a) Halle un modelo cuadrático para dicho fenómeno.

b) Según este modelo, ¿ cuántas moscas habrá en el quinto mes ?

a) Estime la cantidad de sobrevivientes a la edad de 57 años.

b) ¿A qué edad habrán, paroximadamente, 18 000 sobrevivientes?

La siguiente tabla, que llamaremos tabla de defunciones representa el número de muertes ocurridas a una generación inicial de l_0 nacimientos entre las edades exactas t y t+n e indica el número de muertes entre las edades 0 y 9 años, 10 y 19 años, 20 y 29 años, etc. Esto significa en nuestra tabla, por ejemplo, que entre 0 y 9 años murieron 31 500 personas; entre 10 y 19 años murieron 4 070 personas, etc. (t en años y d en miles).

t:	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
d :	31,5	4,07	5,29	5,21	8,08	10,02	13,11	12,64	7,85	1,1

a) Trace un polinomio que modele esta función.

b) ¿A qué edad se produce el menor número de muertes?

c) ¿Cuántas muertes se producen a los 65 años?

La siguiente tabla representa la probabilidad que tiene una persona de edad exacta t de fallecer dentro de los n años siguientes. Por ejemplo la probabilidad que tiene una persona de 0 años de morir dentro de los próximos 9 años es de 0,315. La probalidad que tiene una persona de 10 años de morir dentro de los próximos 9 años es de 0,0595, etc. Considere la tabla siguiente.

t:	0	10	20	30	40	50	60	70	80
d :	0,315	0,059	0,082	0,105	0,152	0,224	0,377	0,585	0,877

a) Trace el gráfico de esta función.

b) ¿Cuál es la probabilidad de morir de una persona de 73 años?

9. Resuelva las siguientes inecuaciones trazando el gráfico de las funciones cuadráticas. a) $(x-2)(x-7)>0$ b) $(3x-1)(4x+8)<0$ c) $x(x-\frac{1}{2})>0$ d) $(\frac{3}{4}x+1)(\frac{x}{2}-22,5)>0$ e) $x^2-7x+6>0$ f) $12x^2-5x+7<0$ g) $2,1x^2-5,7x-2>0$ h) $4x^2+8x-6<0$.

3.9 El DERIVE

Al ejecutar EL DERIVE la pantalla aparece dividida en dos partes. La parte superior, en la cual se leen las especificaciones relativas al programa y la parte inferior en la cual se lee lo siguiente:

Command: Author, Build, Calculus, Declare, Expand, Factor, Help, Jump, Solve, Manage, Options, Plot, Jump, Remove, Simplify, Transfer, move, Window, Approx.

Con la barra espaciadora usted puede mover el cursor sobre cada una de las funciones que aparecen a la derecha de **Command**. Para ejecutarlas, después que el cursor este sobre la función elejida, es suficiente presionar la tecla **Enter**.

3.9.1 El gráfico de la parábola.

Ejemplo 1.

Graficar la parábola que pasa por los puntos $A(0,1)$, $B(2,\frac{7}{2})$ y $C(1,1)$.

Así como por dos puntos pasa una única recta, por tres puntos pasa una única parábola. Esto es esencial para poder trazar la parábola pedida. Se trata, entonces, de hallar la ecuación de la parábola que pasa por tres puntos y, a continuación, graficar dicha ecuación.

1. En **Command** : ponga el cursor en **Declare** y presione la tecla Enter.
2. Aparece **Declare** : Function, Variable, Matrix, Vector. Ponga el cursor en Matrix y presione la tecla **Enter**

7. Coloque en blanco la ecuación de la parábola, presione la tecla Enter y repita la sucesión de operaciones desde (a) hasta (e). En la parte superior de la pantalla aparece el gráfico de la ecuación hallada.

Nota. La escala del sistema cartesiano puede modificarse poniendo el cursor en **Scale**, presionando la tecla Enter y cambiando los valores para x e y.

3.9.2 La parábola de mínimos cuadrados.

Ejemplo 2

Halle la parábola de mínimos cuadrados que pasa por los puntos $A(0,1)$, $B(2,\frac{7}{2})$, $C(1,1)$ y $D(3,4)$. Trace los gráficos de la nube de puntos y de la ecuación de la parábola.

Es claro que por cuatro puntos puede pasar una infinidad de parábolas o ninguna. Sin embargo es posible hallar la parábola que mejor se acerque a los puntos propuestos. Observe que a los puntos dados en el ejemplo precedente le hemos agregado un nuevo punto. Efectuemos las siguientes operaciónes.

1. En **Command :** ponga el cursor en **Declare** y presione la tecla Enter.
2. Aparece **Declare :** Function, Variable, Matrix, Vector. Ponga el cursor en Matrix y presione la tecla **Enter**
3. Aparece **Declare Matrix :** Rows columns. Al lado derecho de Rows escriba 4 y al lado derecho de Columns escriba 2. Para pasar de uno a otro lado se usa el tabulador. Observe que los datos forman una matríz de 4 filas y dos columnas. Presione la tecla **Enter**
4. Aparece **Matrix element:** Escriba sucesivamente:

0 Enter 1 Enter

2 Enter $\frac{7}{2}$ Enter

1 Enter 1 Enter

3 Enter 4 Enter

En la parte superior de la pantalla aparece lo siguiente:

Dependiendo de la ubicación de la nube de puntos, se puede ajustar la parábola utilizando la expresión ax^2+b. De lo dicho se deprende que en el ejemplo 1, debería escribirse:

$$2 : Fit \left[x, ax^2 + b], \left| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & \frac{7}{2} \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{matrix} \right| \right]$$

El lector puede verificar fácilmente que los ajustes difieren bastante.

3.9.3 La evaluación de una función.

Ejemplo 3

Dada la función $N(t) = t^2 - 3$, calcular $N(4) - N(3)$.

1. En **Command :** ponga el cursor en **Author** y presione la tecla Enter.

2. Aparece **Author expression:** Escriba $N(t) := t^2 - 3$ y presione la tecla Enter. En la parte superior aparece $N(t) := t^2 - 3$ y en la inferior aparece Command. En Author presione la tecla Enter.

3. Aparece **Author expression:** Escriba $N(3) - N(3)$ y presione la tecla Enter.

4. En la parte superior aparece $N(4) - N(3)$. En la parte inferior, en Command, presione la tecla **Simplify**.

5. En la parte superior aparece 7, que es el valor buscado.

manual y calculemos dicha expresión para algunos valores pequeños y grandes de "n". En efecto, la tabla siguiente muestra dichas aproximaciones hasta 9 decimales.

n = 1	$(1+\frac{1}{1})^1$	2,00000000
n = 2	$(1+\frac{1}{2})^2$	2,25000000
n = 3	$(1+\frac{1}{3})^3$	2,37037037
n = 4	$(1+\frac{1}{4})^4$	2,44140625
n = 10	$(1+\frac{1}{10})^{10}$	2,59374246
n = 100	$(1+\frac{1}{100})^{100}$	2,70481382
n = 1 000	$(1+\frac{1}{1\,000})^{1\,000}$	2,71692393
n = 100 000	$(1+\frac{1}{100\,000})^{100\,000}$	**2,71828046**

Se han marcado con negritas los decimales exactos de la aproximación del número "e" para $n = 100\,000$. En realidad, cuando "n" crece sin límites, es decir, cuando "n tiende a infinito", la expresión $(1 + \frac{1}{n})^n$ se aproxima a un número irracional que frecuentemente se lo designa con la letra **e**. El valor aproximado de este número a 9 decimales exactos es:

$$e \approx 2,718281828$$

Formalmente decimos que dicha expresión "tiende a e", cuando "n" crece sin límite y escribimos:

$$(1+\frac{1}{n})^n \longrightarrow \mathbf{e}$$

Más adelante analizaremos en detalle la importancia del número "e". Una aplicación interesante de esta expresión, la hallamos en un modelo que permite calcular los intereses a plazos devengados por un capital.

4.1 Modelos de inversión a plazos

Existen algunos fenómenos de naturaleza económica que se pueden modelar con ayuda de la expresión $(1+\frac{1}{n})^n$. Entre éstos se hallan aquellos que permiten calcular el interés que genera el dinero cuando se deposita en bancos o financieras.

Cuando el dinero (**el principal**) se invierte en un banco, comunmente genera intereses. Cuando dicho interés se calcula directamente sobre el principal, se llama **interés simple**. Después que han pasado "t" años, el saldo (es decir, el principal más el interés) se calcula con la fórmula:

$$s(t) = P(1+rt)$$

en que $P = 2\,000\,000$ de pesos, $t = 2$, $r = 0,06$ y $k = 4$.

El saldo que se obtendrá al cabo de dos años es:

$$S(2) = 2\,000\,000(1 + \frac{0,06}{4})^{4\cdot 2}$$

es decir

$$2\,000\,000(1 + \frac{0,06}{4})^{8} \approx 2\,252\,985 \text{ pesos}$$

b) Si el interés se compone continuamente usamos la función:

$$S(t) = Pe^{rt}$$

donde $P = 2\,000\,000$, $r = 0,06$ y $t = 2$. En esta situación el saldo que se obtendrá después de dos años es:

$$S(2) = 2\,000\,000e^{0,12} \approx 2\,254\,993 \text{ pesos}$$

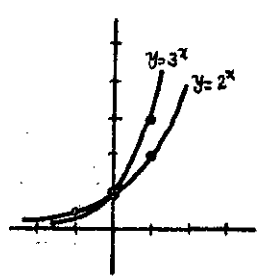
Observe que el dinero que gana más intereses es el que se compone continuamente. Las funciones que se expresan mediante potencias de "e" juegan un importante papel en una gran cantidad de modelos. Como hemos dicho en otras oportunidades, cuando estamos estudiando un determinado fenómeno de la naturaleza, siempre es conveniente tener un gráfico de la función que nos permita "ver" el comportamiento de dicho fenómeno. En lo que sigue trataremos de analizar esta cuestión.

4.2 El gráfico de la función exponencial

En general una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es una constante positiva y "x" es la incógnita. En la figura (1) se muestran los gráficos de las funciones $f(x) = 2^x$ y $f(x) = 3^x$.

Para trazar los gráficos de estas funciones podemos construir una tabla para algunos valores de la variable independiente, que nos permita visualizar su comportamiento.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$y = 2^x$	0	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	$+\infty$
$y = 3^x$	0	0,03	0,11	0,33	1,00	3	9	27	$+\infty$



fig(1)

De las gráficas se puede concluir que la función exponencial cuya base está entre 0 y 1 está definida para todos los números reales, es decir, su dominio es $I\!R$. Puesto que las gráficas están sobre el eje X, $f(x) > 0$ para todo todo $x \in I\!R$, su ámbito (rango) es $I\!R^+$.

Las gráficas son asintóticas al eje X, es decir, cuando x tiende a $+\infty$, entonces, $f(x)$ tiende a cero. Formalmente escribimos que si $x \longrightarrow +\infty$, entonces, $f(x) \longrightarrow 0$. Además ambas gráficas cortan al eje Y en el punto $P(0,1)$. Finalmente, observemos que cuando $x \longrightarrow -\infty$, entonces, $f(x) \longrightarrow +\infty$.

En general, si $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$, entonces

i) $f(0) = a^0 = 1$, es decir la curva corta al eje Y en el punto $P(0,1)$

ii) No hay intersección con el eje x

iii) Si $x \longrightarrow +\infty$, entonces, $f(x) \longrightarrow 0$. Dicho en palabras: si x tiende a más infinito, entonces y tiende a cero.

iv) Si $x \longrightarrow -\infty$, entonces, $f(x) \longrightarrow +\infty$. Dicho en palabras: si x tiende a menos infinito, entonces, $f(x)$ tiende a más infinito.

Ejemplo 2

Trace el gráfico de la función $y = \frac{120}{4+8e^{-0{,}05x}}$

SOLUCIÓN. Cuando trazamos el gráfico de las funciones exponenciales, crecientes o decrecientes, analizamos los siguientes aspectos:

i) Determinamos el punto donde la curva corta al eje Y. Para hallar dicho punto debemos hacer $x = 0$ en la ecuación propuesta, es decir:

$$y(0) = \frac{120}{4 + 8e^{-0{,}05\cdot 0}} = \frac{120}{4 + 8e^0} = \frac{120}{4+8} = \frac{120}{12} = 10$$

ii) Observamos si existe intersección con el eje X. Para esto hacemos y=0 en la ecuación propuesta, es decir:

$$y = \frac{120}{4 + 8e^{-0{,}05x}} = 0$$

Una de las aplicaciones más interesantes de la función exponencial se refiere a la dinámica de las poblaciones. En lo que sigue mostraremos algunas aplicaciones sencillas de modelos de crecimiento y decrecimiento de una población.

4.3 Modelo de crecimiento exponencial. El modelo de Maltus.

El modelo de Maltus, o de crecimiento ilimitado, supone únicamente que la velocidad de crecimiento de las población en el instante "t", es proporcional al tamaño de la población en ese instante. Esto presupone que la población se desarrolla en un ambiente no sujeto a restricciones y que los recursos para mantener dicha población, son ilimitados. Se puede demostrar que bajo esas condiciones la población crece en forma exponencial. Es decir, si: $N(t)$ es el tamaño de la población en el instante t, entonces, el crecimiento de dicha población se puede modelar mediante la función:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

donde N_0 es el tamaño inicial de la población y k es una cierta constante que se puede determinar de acuerdo al crecimiento de la población.

Thomas Robert Malthus (1766-1834), fue un economista inglés que se hizo notar por un brillante tratado de economía publicado en el año 1798. Malthus era un pastor anglicano que siempre tuvo contacto con la pobreza y, en su obra, *essay of population*, analiza las causas de la miseria; miseria que en esa época, alrededor de 10 años después de la revolución francesa, asolaba a la mayoría de los países de Europa.

Los teóricos de la política creían que en un futuro próximo, no muy lejano, la igualdad entre las personas sería un hecho y la pobreza desaparecería para siempre. Sin embargo, Malthus, no compartía en absoluto ese optimismo e intentaba responderse si la miseria de la población era un problema de la estructura de la sociedad o bien correspondía a una ley natural. Después de años de reflexión se inclinó por la segunda hipótesis, esto es, por la suposición de que *hay una ley que supone que debe haber una parte de los seres vivos que debe sufrir hambre* y, sostenía esto, afirmando que mientras el número de individuos sobre la tierra aumente en una progresión geométrica, es decir, aumenta en la forma:

$$1, 2, 4, 8, 16, ...$$

Para Malthus la lucha por la sobrevivencia significaba la decadencia de la sociedad, la pobreza y la miseria. En cambio, para Darwin, la lucha por la sobrevivencia es el motor de la evolución y perfeccionadora de la naturaleza.

Algunos naturalistas anteriores a Darwin habían calculado, por ejemplo, que una planta con sólo dos semillas anuales alcanzaría, en menos de 30 años, más de un millón de ejemplares, que la mosca pone en toda su vida un centenar de huevos, que ciertos peces ponen millones de huevos, ¿cómo es que ninguna de estas especies no invaden enteramente la tierra? Si esto último no sucede, sugirió Darwin, es debido a los formidables estragos que produce la lucha por la subsistencia entre los individuos jóvenes antes de la madurez sexual y la procreación. En medio de la naturaleza hostil todos los seres tratan de sobrevivir. Así, los individuos de una misma especie, portadores de una característica ventajosa, tienen mayores probabilidades que sus competidores de escapar a los innumerables peligros que los asechan. Tales individuos tendrán mayores posibilidades de sobrevivir y alcanzar su madurez sexual, trasmitiendo a sus descendientes esas características. La repetición de este proceso en las generaciones siguientes hará posible la acumulación automática de dichas ventajas, resultando de esto una selección natural.

Darwin desarrolló una gran parte de su teoría sobre **El origen de las especies** en su tránsito por Chile. Llegó a Tierra del Fuego en el Bergantín **Beagle** en diciembre de 1832 y, según su diario de viaje, estuvo en el país hasta julio de 1835. El Beagle, al mando del capitán **Robert Fitz Roy** levó anclas de Inglaterra en 1831 y navegó durante 5 años por los oceanos mayores, principalmente a lo largo de América del Sur, continuando luego a Nueva Zelandia y Australia.. Los dos años y medio que Darwin estuvo en Chile forman parte de una de las hazañas más extraordinarias del pensamiento humano.

Ejemplo 3

Un demógrafo halló que una ciudad que tenía 11 567 habitantes alcanzó, después de 6 años, 60 000 individuos. Determine el tamaño de la población de dicha ciudad después de 10 años. Suponga que la población crece sin restricciones.

SOLUCIÓN. Puesto que el tamaño iniacial de la población es de $N_0 = 11\,567$ personas, podemos escribir:

$$N(t) = 11\,567e^{kt}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos resulta:

$$ln\, e^{20k} = ln\, 3 \Longleftrightarrow 20k = ln\, 3 \Longleftrightarrow k = \frac{ln\, 3}{20} \Longleftrightarrow k = \frac{1,09861}{20} \approx 0,055$$

Puesto que $k = 0,055$ la función modeladora es:

$$N(t) = 2\,000e^{0,055t}$$

Por lo tanto, al final de 60 minutos habrán:

$$N(60) = 2\,000e^{0,055 \cdot 60} = 2\,000e^{3,3} \quad \text{bacterias}$$

4.4 Modelo de decrecimiento exponencial

Una cantidad $N(t)$ que decrece de acuerdo con una función de la forma

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

donde N_0 y k son constantes positivas se dice que experimenta un decrecimiento exponencial o que decrece exponcialmente. Este tipo de decrecimiento se da en fenómenos tales como decrecimiento radioactivo, decrecimiento de las ventas de un producto cuando se interrumpe la publicidad, depreciación del valor de las maquinarias después de cierto tiempo de uso, etc.

Ejemplo 5

Una cierta maquinaria industrial se deprecia de forma que su valor, pasados "t" años, viene dada por la función:

$$Q(t) = Q_0 e^{-0,04t}$$

Después de 20 años, la maquinaria tiene un valor de 320 000 pesos, ¿ cuál era su valor original ?

SOLUCIÓN. Observemos que el objetivo del problema es averiguar el valor de Q_0. Puesto que $Q(20) = 320\,000$ pesos se tiene:

$$Q(20) = Q_0 e^{-0,04 \cdot 20} = Q_0 e^{-0,8} = 320\,000$$

En consecuencia la curva corta al eje t en el punto $(\frac{\ln A - \ln B}{t}, 0)$

Note que dicha ecuación (llamada ecuación exponencial) tiene la incognita en el exponente. Más adelante desarrollaremos los métodos necesarios para resolver este tipo de ecuaciones. iii) Se ve que si $t \longrightarrow +\infty$, entonces, $Q(t) \longrightarrow B$ En efecto:

$$\text{Si } t \longrightarrow +\infty, \text{ entonces, } e^{-kt} \longrightarrow 0, \text{ por lo tanto, } Q(t) = B - Ae^{-kt} \longrightarrow B$$

iv) Finalmente si $t \longrightarrow -\infty$, entonces, $B - Ae^{-kt} \longrightarrow -\infty$. El gráfico muestra que cuando el tiempo crece sin límite hacia la derecha, el individuo se aproxima hacia una cima de eficacia, y que cualquier instrucción adicional surtirá poco efecto sobre sus resultados.

Ejemplo 6

El ritmo al que un empleado postal puede clasificar cartas es una función de la experiencia del empleado. El director del correo de Copiapó estimó que después de t meses de experiencia en el trabajo, el empleado medio puede clasificar:

$$Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t} \text{ cartas por hora}$$

a) ¿Cuántas cartas puede clasificar por hora un empleado nuevo ?

b) ¿ Cuántas cartas puede clasificar por hora un empleado con 6 meses de experiencia ?

c) Aproximadamente, ¿ cuántas cartas podrá clasificar por hora, como máximo un empleado medio ?

d) Haga un gráfico de la función modeladora.

SOLUCIÓN. a) Puesto que un empleado nuevo tiene experiencia cero, el número de cartas por hora que podrá clasificar es:

$$Q(0) = 700 - 400e^{-0,5\cdot 0} = 700 - 400e^{0} = 700 - 400 = 300$$

b) Después de una experiencia de 6 meses el empleado podrá clasificar:

$$Q(6) = 700 - 400e^{-0,5\cdot 6} = 700 - 400e^{-3} = 680 \quad \text{cartas por hora}$$

En consecuencia la curva no corta al eje t.

iii) Por otra parte si $t \longrightarrow +\infty$, entonces, $Ae^{-kt} \longrightarrow 0$. Por lo tanto:

$$\frac{B}{1+Ae^{-kt}} \longrightarrow B$$

iv) Finalmente si $t \longrightarrow -\infty$, entonces, $A^{-kt} \longrightarrow +\infty$, y por lo tanto:

$$\frac{B}{1+Ae^{-kt}} \longrightarrow 0$$

Ejemplo 7

Los registros de salud pública, del año 1956, de la III Región, muestran que t semanas después del brote de una rara forma de gripe (influenza), aproximadamente:

$$N(t) = \frac{20}{1+19e^{-1,2t}} \quad \text{(en miles de personas)}$$

habían sufrido la enfermedad.

a) ¿ Cuantas personas tenían la enfermedad cuando esta brotó ?

b) ¿ Cuántas personas tenían la gripe al final de la segunda semana ?

c) ¿ Si la tendencia continúa, cuando personas contraerán la enfermedad ?

Solución. Cuando la enfermedad empezó a desarrollarse, es decir en el momento $t = 0$:

$$N(0) = \frac{20}{1+19e^{-1,2(0)}} = \frac{20}{1+19} = 1$$

Es decir, 1 000 personas ya tenían la enfermedad.

b) Después de dos semanas, es decir, en $t = 2$:

$$N(2) = \frac{20}{1+19e^{-1,2(2)}} = 7,343 \text{ personas}$$

Esto es, 7 343 personas habían contraido la enfermedad.

c) Al continuar la tendencia, es decir, cuando $t \longrightarrow +\infty$, entonces $19e^{-kt} \longrightarrow 0$, de lo cual resulta que:

$$N(t) = \frac{20}{1+19e^{-kt}} \longrightarrow 20$$

4.7.1 Ecuaciones de la forma $a^x = b$

Para resolver las ecuaciones de este tipo debemos expresar el número b como una potencia de base a.

Ejemplo 9

Resuelva las ecuaciones siguientes: $a)\ 2^x = 8 \quad b)\ (\sqrt{3})^x = 27 \quad c)\ \sqrt[x]{5} = \frac{1}{25}$

a) Utilizando la propiedad 1) resulta: $2^x = 8 \Longleftrightarrow 2^x = 2^3 \Longleftrightarrow x = 3$

En consecuencia la solución de la ecuación es $x = 3$. Tal como en las ecuaciones lineales y cuadráticas, se puede verificar la solución reemplazando el valor de x en la ecuación propuesta.

b) Utilizando la misma propiedad se tiene:

$$(\sqrt{3})^x = 27 \Longleftrightarrow (3^{\frac{1}{2}})^x = 3^3 \Longleftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^3 \Longleftrightarrow \frac{x}{2} = 3$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = 6$.

Finalmente: c) $\sqrt[x]{5} = \frac{1}{25} \Longleftrightarrow 5^{\frac{1}{x}} = 5^{-2} \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = -2$. Por lo tanto $x = -\frac{1}{2}$. Observe que la ecuación propuesta no tiene solución, ya que no existe una raíz que tenga índice negativo.

4.7.2 Ecuaciones de la forma $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Para resolver este tipo de ecuación debemos transformar las bases de las potencias de modo que podamos utilizar la propiedad (1). Es decir:

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Longleftrightarrow a^{f(x)} = a^{p \cdot g(x)} \Longleftrightarrow f(x) = p \cdot g(x)$$

En consecuencia resolver la ecuación $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, se reduce a resolver una ecuación de la forma $f(x) = p \cdot g(x)$.

Ejemplo 10

Resuelva las ecuaciones: $a)\ 3^{\frac{x+1}{2}} = 9^{\sqrt{x}} \quad b)\ 5^{\frac{x^2-1}{2}} = 25^{x-100}$

SOLUCIÓN. a) Escribimos la ecuación en la forma: $(2^x)^2 - 3(2^x) + 2 = 0$.

Si hacemos el cambio de variable: $2^x = y$ en la ecuación anterior, resulta la ecuación cuadrática: $y^2 - 3y + 2 = 0$; cuyas soluciones son $y_1 = 1$ y $y_2 = 2$.

Reemplazando estos valores de y en la ecuación de cambio de variable $2^x = y$ se tiene que:

$i)$ $2^x = 1$ de lo cual resulta que : $2^x = 2^0 \Longleftrightarrow x = 0$

$ii)$ $2^x = 2$ de lo cual resulta que; $2^x = 2^1 \Longleftrightarrow x = 1$

Se puede verificar fácilmente que dichos valores son soluciones de la ecuación propuesta.

b) Escribimos la ecuación en la forma $3^x + 3 \cdot 3^x + 3^2 \cdot 3^x = 39$. Factorizando el primer miembro por 3^x, resulta:

$$3^x(1 + 3 + 3^2) = 39 \Longleftrightarrow 13 \cdot 3^x = 39 \Longleftrightarrow 3^x = 3 \Longleftrightarrow 3^x = 3^1$$

En consecuencia la solución es $x = 1$. En efecto:

$$3^1 + 3^{1+1} + 3^{1+2} = 3^1 + 3^2 + 3^3 = 3 + 9 + 27 = 39$$

4.8 Ejercicios propuestos

1. Programe una calculadora manual para evaluar $(1 + \frac{1}{n})^n$ y halle el número "e" con 15 decimales exactos.

2. Aprenda como usar la calculadora para las potencias de "e". En particular calcule:
$$e^3, \quad e^{3+0,6}, \quad e^{-0,07+1,8}, \quad \sqrt{e^{-1}}, \quad \frac{1+\frac{1}{e}}{2}, \quad \frac{e^2 - e^4}{e^4}.$$
Aproxime sus cálculos a 6 decimales.

3. Esboce el gráfico de las funciones exponenciales siguientes:

   $a)$ $y = 2 + e^x$ $b)$ $y = 2 - 3e^x$ $c)$ $y = 5 - 3e^{-x}$ $d)$ $y = \frac{1+e^{-x}}{2}$

4. Suponga que se invierten 15 250 dólares a un tipo anual de interés al 7%. Calcule el saldo después de 25 años si el interés se compone semestralmente y continuamente. Compare ambos saldos con la inversión inicial.

12. Cuando los profesores seleccionan textos para sus cursos, usualmente eligen entre los libros que ya están en su biblioteca. Por esta razón muchos editores envían ejemplares de regalo de nuevos textos a profesores que enseñan cursos realacionados con su especialidad. El editor de matemáticas de una importante editorial estima que si se distribuyen x miles de ejemplares gratuitos, las ventas en el primer año de un cierto texto nuevo de matemáticas será aproximadamente de:

$$f(x) = 20 - 15e^{-0,2x} \quad \text{(miles de ejemplares)}$$

a) Trace un gráfico aproximado de la función. b) ¿Cuántos ejemplares puede esperar vender el editor en el primer año si no se han envíado ejemplares gratuitos. c) ¿Cuántos ejemplares puede esperar vender el editor en el primer año si se han envíado 10 000 ejemplares gratuitos? d) Si la estimación del editor es correcta, ¿Cuál es la estimación más optimista de ventas para el primer año?

13. Cuando una maquinaria insdustrial tenga "t" años, su valor de reventa será de:

$$V(t) = 4\,800e^{-\frac{t}{5}} + 400 \quad \text{dólares}$$

a) Trace un gráfico aproximado de la función $V(t)$. ¿Qué le sucede al valor de la maquinaria cuando "t" crece sin límite? b) ¿Cuál fue el valor de la maquinaria cuando era nueva? c) Cuál será el valor de la maquinaria dentro de 10 años?

14. Una bebida fría se saca del refrigerador en un día de verano y se coloca en una habitación cuya temperatura es de 30 grados celsius. de acuerdo con la ley calórica de Newton, la temperatura de la bebida después de t minutos viene dada por la función $f(t) = 30 - Ae^{-kt}$. Si la temperatura de la bebida era de 10 grados celsius cuando dejó el refrigerador y de 15 grados celsius después de 20 minutos, ¿cuál será la temperatura de la bebida después de 40 minutos?

15. Se estima que dentro de t años, la población de un cierto país será de:

$$N(t) = \frac{80}{8 + 12e^{-0,06t}} \quad \text{(millones)}$$

a) ¿Cuál es la población actual? b) ¿Cuál será la población dentro de 50 años? c) ¿Qué le sucederá a la larga, a dicha población ?

16. Un accidente de tráfico fue presenciado por $\frac{1}{10}$ de los habitantes de Inca de Oro. El número de residentes que habían oído hablar del accidente t horas

2. Se introduce, en un estero, una población de moluscos que crece de acuerdo con la función

$$N(t) = 100(1 + \frac{4t}{50 + t^2})$$

donde t está dado en años y $N(t)$ en millones.

a) ¿Cuál es la población inicial de moluscos en esta experiencia?

b) ¿Cuánto crece la población entre el tercer y cuarto año?

c) Halle los intervalos de tiempo en que la población crece (decrece).

3. Se intenta poblar una zona desértica del Norte de Chile con lagartijas de la especie **Lacerta Muralis** que se alimenta de insectos y vive en los huecos de las paredes. Los especialistas estiman que dicha zona se poblaría, a causa del escaso alimento, de acuerdo al modelo siguiente:

$$P(t) = \frac{100}{1 + 49e^{-\frac{t}{2}}}$$

(Si t=0 en el año 1993)

a) ¿Cuál es la población inicial de lagartijas de este experimento?

b) Estime el intervalo de mayor crecimiento de la población?

c) ¿Cuál será el mayor número de lagartijas que tendrá la población?

d) ¿Cuánto crecería la población entre los años 1994 y 1995?

4. Una población experimental de moscas de la fruta aumenta su tamaño de acuerdo al modelo

$$N(t) = 33e^{0,5493t}$$

donde t se mide en días y $N(t)$ en miles.

a) ¿Cuál es la población inicial de este emjambre?

b) ¿Qué población habrá en el cuarto día?

c) Cuanto crece la población entre el quinto y sexto día?

d) Estime un intervalo donde la población crece más rápidamente.

e) ¿Cuál será la población de moscas si t crece indefinidamente?

donde $P(t)$ es el peso en gramos del cultivo y t se mide en horas.

a) Calcular el peso del cultivo en $t = 0$ y $t = 1$.

b) ¿Cuál será el peso del cultivo después de 1 mes?

c) ¿Cuál es el mayor peso que puede alcanzar el cultivo cuando el tiempo t crece indefinidamente?

9. Se efectuaron las mediciones de la corriente en un circuito eléctrico como una función del tiempo. El circuito tenía una resistencia de 5 ohms y 10 H. Se hallaron los siguientes datos

i: (amperes)	0.00	2.52	3.45	3.80	3.92
t: (segundos)	0.00	2.00	4.00	6.00	8.00

a) Grafique la nube de puntos para estos datos.

b) Halle la curva exponencial que ajusta dichos datos.

c) Analizando el gráfico y la ecuación, determine el valor al que tiende la corriente cuando $t \longrightarrow +\infty$.

d) ¿Cuál era la intensidad de la corriente en el tiempo $t = 1,75$ segundos?

10. Se midió el incremento en cierta barra metálica en relación con los incrementos de la temperatura. Si y representa el incremento en la longitud para el correspondiente incremento de temperatura x, hallar la curva exponencial que ajusta los siguientes datos

x: (grados celsius)	50.0	100	150	200	250
y: (centímetros)	1.00	4.40	9.40	16.4	24.0

a) ¿En cuánto aumenta la longitud, la barra metálica, cuando la temperatura es de 350 grados celcius?

b) Calcule la temperatura que se necesita para que la barra aumente su longitud en 7,5 cm.

3. Aparece **Declare Matrix** : Rows columns. Al lado derecho de Rows escriba 4 y al lado derecho de Columns escriba 2. Para pasar de uno a otro lado se usa el tabulador. Observe que los datos forman una matríz de 4 filas y dos columnas. Presione la tecla **Enter**

4. Aparece **Matrix element**: Escriba sucesivamente:

   1 Enter 2 Enter

   2 Enter 3 Enter

   3 Enter 9 Enter

   4 Enter 15 Enter

   En la parte superior de la pantalla aparece lo siguiente:

$$1: \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 9 \\ 4 & 15 \end{vmatrix}$$

   En la parte inferior aparece **Command**. Presione la tecla Enter.

5. Aparece **Author expression**: Escriba lo siguiente:

$$\text{fit } ([x, k2^{(x)}], \text{tecla } F_3)$$

   Presione la tecla Enter.

   En la parte superior de la pantalla aparece lo siguiente:

$$2: Fit \left[[x, k2^{(x)}], \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 9 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} \right]$$

   Ponga el cursor en **Simplify** y luego presione la tecla **Enter**. En la parte inferior aparece **Command** y en la parte superior de la pantalla aparece la ecuación pedida:

$$3: \frac{82}{85} e^{\frac{7495}{1001} x} \approx 0,96 e^{0,69x}$$

Capítulo 5 El modelo Logarítmico

Objetivos

1. **Comprender el concepto de función logaritmo.**
2. **Trazar el gráfico de la función logaritmo.**
3. **Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.**
4. **Analizar modelos en que intervenga la función logaritmo.**
5. **Utilizar EL DERIVE para resolver ecuaciones y estudiar fenómenos que se comportan en forma exponencial y logarítmica.**

5.1 La función logaritmo.

Hemos visto que la función $y = a^x$ con $a \neq 1$, $a > 0$, es una función **creciente o decreciente** donde:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \text{ tal que, para cada x} : x \rightsquigarrow y = a^x$$

De lo anterior se desprende que para cada valor de x, del dominio de la función, existe un único valor de "y"; reciprocamente, para cada valor de "y" existe un único valor de x. Así, por ejemplo, en la ecuación $y = 10^x$, si $x = 2$, entonces $y = 10^2 = 100$; al mismo tiempo, si $100 = 10^x$, entonces x es igual a 2.

Sin embargo, dado un valor de y cualquiera, no siempre es fácil determinar el comunmente, logaritmo decimal y logaritmo natural respectivamente. En ambos casos se omiten las bases cuando se escriben los logaritmos. Así, por ejemplo:

a) El $log_{10} 123$ se escribe $log\, 123$ b) El $log_e 3\,899$ se escribe $ln\, 3\,899$

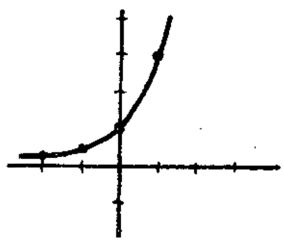
Si queremos graficar la función logaritmo en el mismo sistema de coordenadas, es decir, en un sistema en que la variable "x" es la variable independiente y la variable "y" es la variable dependiente debemos expresar "y en función de x" y escribir $y = log_a x$ en vez de $x = log_a y$.

Ejemplo 13

Trace el gráfico de la función $y = log_2 x$ utilizando el gráfico de la función $y = 2^x$.

SOLUCIÓN. De acuerdo a la definición de función logaritmo y de la tabla de valores de $y = 2^x$ se pueden obtener los datos para trazar el gráfico de $y = log_2 x$. En efecto, de la tabla de la función $y = 2^x$, de la página 81:

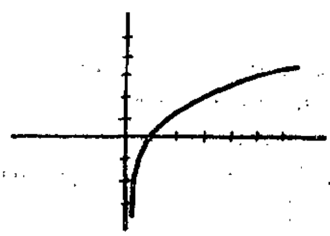
x	2^x
$-\infty$	0
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
2	4
3	8



$y = 2^x$

se obtiene la tabla de la función $y = log_2 x$

x	$log_2 x$
0	$-\infty$
0,125	-3
0,25	-2
0,5	-1
1	0
4	2
8	3
$+\infty$	$+\infty$



$y = log_2 x$

A la par de cada tabla se muestran las figuras 1 y 2 de los gráficos de cada una de las funciones.

5.2 Propiedades de la función logaritmo

Las propiedades de la función logaritmo se deducen de las correspondientes de la función exponencial.

[1] El logaritmo del producto de dos o más cantidades es igual al logaritmo de la primera cantidad más el logaritmo de la segunda. En símbolos:

$$\boxed{log_a xy = log_a x + log_a y}$$

[2] El logaritmo del cociente de dos cantidades es igual al logaritmo de la primera cantidad menos el logaritmo de la segunda. En símbolos:

$$\boxed{log_a \tfrac{x}{y} = log_a x - log_a y}$$

[3] El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

$$\boxed{log_a x^n = n log_a x}$$

De estas propiedades se desprenden de inmediato las siguientes:

[4] i) $log_a a = 1$ ii) $log_a \frac{1}{x} = -log_a x$ iii) $log_a 1 = 0$

Ejemplo 15

Calcule el valor de: a) $log(0,001)$ b) $log_3 6\,561$

SOLUCIÓN. De acuerdo a las propiedades resulta:

a) $log(0,001) = log(10)^{-3} = -3 log\, 10 = -3(1) = -3$

b) $log_3 6\,561 == log_3 9^4 = 4 log_3 9 = 4(2) = 8$

Ejemplo 16

Verifique las siguientes igualdades.

a) $log\, c^2 + log\, x - log\, c = log\, cx$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}log_2 2 + \frac{1}{4}log_2 2 + \frac{1}{3}log_2 2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12}
\end{aligned}
$$

b) Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
log_5\sqrt{5}\cdot(\sqrt{5})^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{5} &= log_5(5)^{\frac{1}{2}} + log_5(\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} + log_5(5)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{2}log_5 5 + \frac{1}{6}log_5 5 + \frac{1}{3}log_5 5 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1
\end{aligned}
$$

c) Finalmente:

$$
\begin{aligned}
log_a\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a} &= \frac{1}{2}log_a a + \frac{1}{3}log_a a + \frac{1}{5}log_a a \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}
\end{aligned}
$$

5.3 Ecuaciones logarítmicas

No todas las ecuaciones exponenciales pueden resolverse en la forma como lo hemos hecho hasta ahora. ¿como resolver, por ejemplo, la ecuación

$$10^x = 6,3$$

En estos casos es cuando debemos recurrir al concepto de logaritmo.

Ejemplo 18

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $10^x = 6,3$ b) $e^{2x+1} = 4$ c) $(\frac{1}{2})^x = 10$

SOLUCIÓN. a) Aplicando logaritmo en base 10, en ambos miembros de la ecuación, se tiene:

$$10^x = 6,3 \Longleftrightarrow log\, 10^x = log\, 6,3 \Longleftrightarrow x log\, 10 = \log\, 6,3$$

$\frac{4log\,2}{3} + \frac{(x-1)log\,3}{3} = \frac{2xlog\,3+1}{5} \quad / \cdot 15 \Longleftrightarrow 20log\,2 + 5xlog\,3 - 5log\,3 = 6xlog\,3 + 3$

Reuniendo términos semejantes y despejando la incognita resulta:

$$-xlog\,3 = 3 - 20log\,2 + 5log\,3 \Longleftrightarrow x = \frac{3 - 20log\,2 + 5log\,3}{-log\,3}$$

Calculando los logaritmos se obtiene:

$$x = \frac{3 - 6,02059 + 2,38560}{-0,47712} = \frac{-0,63499}{-0,47712} = 1,33088$$

Ejemplo 20

Determine el dominio de las funciones: a) $y = log\,(x+1)$ b) $log_2\sqrt{x^2+4} + log\,(x^2+1)$

SOLUCIÓN. Recordemos que la función logaritmo está definida solamente para valores del argumento mayores que cero. En consecuencia el dominio de la función lo hallamos imponiendole esta condición. En efecto: a) $y = log\,(x+1)$ existe si y sólo si $x + 1 \geq 0$, esto es, si y sólo si $x \geq -1$. En consecuencia el dominio de la función propuesta es el intervalo $[-1, +\infty[$.

Analogamente, la función $log_2\sqrt{x^2+4} + log\,(x^2+1)$ existe, si y sólo si los argumentos de cada una de las funciones que la componen son mayores que cero. Observe quel $x^2 + 4$ es mayor que cero para todos los números reales. Igualmente $x^2 + 1$ es mayor que cero para todos los números reales. Por lo tanto el dominio de la función propuesta es el conjunto de los números reales.

Las ecuaciones exponenciales de las secciones 4.71 a la 4.73, no siempre pueden resolverse en la forma propuesta en dichos apartados. La mayoría de las veces es necesario utlizar el concepto de logaritmo.

5.4 Ecuaciones de la forma $a^x = b$

Para resolver una ecuación del tipo $a^x = b$, aplicamos logaritmos en ambos miembros de la ecuación.

Ejemplo 21

Resuelva las ecuaciones: a) $42^x = 121$ b) $3^x = 0,8$ c) $12^x = 444$.

SOLUCIÓN. a) $42^x = 121 \Longleftrightarrow log\,42^x = log\,121 \Longleftrightarrow xlog\,42 = log\,121$.

b) Por otra parte se tiene que:

$$log\, 10^{x^2-4} = log\, 15 \Longleftrightarrow (x^2-4) log\, 10 = log\, 15$$

Puesto que $log\, 10 = 1$, entonces:

$$x^2 - 4 = log\, 15 \Longleftrightarrow x^2 = 4 - log\, 15 \Longleftrightarrow x = \sqrt{4 - log\, 15} \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{5,17609}$$

En consecuencia, las soluciones son:

$$x_1 = 2,2751 \quad ; x_2 = -2,2751$$

5.6 Ecuaciones de la forma $a^{f(x)} = b^{g(x)}$.

Tal como en los casos anteriores, para resolver este tipo de ecuaciones se aplican logaritmos (y sus propiedades) en ambos miembros y a continuación se despeja la incognita.

Ejemplo 23

Resuelva las siguientes ecuaciones: a) $3^{x+4} = 2^{\frac{x}{4}+2}$ b) $2^{\frac{3x-1}{5}} = 7^{\frac{4x-5}{3}}$

SOLUCIÓN. a) Aplicando logaritmos en ambos miembros resulta:

$$\begin{aligned} 3^{x+4} = 2^{\frac{x}{4}+2} &\Longleftrightarrow (x+4)log\, 3 = (\frac{x}{4}+2)log\, 2 \\ &\Longleftrightarrow x log\, 3 + 4 log\, 3 = \frac{x}{4} log\, 2 + 2 log\, 2 \\ &\Longleftrightarrow x(log 3 - \frac{1}{4} log\, 2) = 2 log\, 2 - 4 log\, 3 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{2 log\, 2 - 4 log\, 3}{log\, 3 - \frac{1}{4} log\, 2} \end{aligned}$$

b) Analogamente resulta:

$$\begin{aligned} 2^{\frac{3x-1}{5}} = 7^{\frac{4x-5}{3}} &\Longleftrightarrow log 2^{\frac{3x-1}{5}} = log 7^{\frac{4x-5}{3}} \\ &\Longleftrightarrow \frac{3x-1}{5} log\, 2 = \frac{4x-5}{3} log\, 7 \\ &\Longleftrightarrow \frac{3x}{5} log\, 2 - \frac{1}{5} log\, 2 = \frac{4x}{3} log\, - \frac{5}{3} log\, 7 \end{aligned}$$

De esta última ecuación resulta: $x + 1 = 4x - 4 \iff x = \frac{5}{3}$.

5.8 Otros modelos exponenciales

Algunos modelos exponenciales estudiados en las secciones precedentes conducían a una ecuación exponencial que debía resolverse utilizando el concepto de logaritmo. En lo que sigue restudiaremos dichos modelos.

Ejemplo 25

La población del mundo está creciendo a un ritmo aproximado de un 2 por ciento anual. Si el ritmo de crecimiento permanece constante, ¿cuánto tardará la población mundial en duplicarse?

SOLUCIÓN. Recordemos que la población dentro de t años está dada por la función:

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

donde N_0 es la población actual y k es la tasa de crecimiento. Nuestro objetivo es hallar el valor de t para cuando $N(t) = 2N_0$. Es decir, queremos resolver la ecuación:

$$2N_0 = N_0 e^{0,02t}$$

Dividiendo la ecuación por N_0 resulta sucesivamente que:

$$2 = e^{0,02t} \iff ln\, 2 = 0,02t \iff t = \frac{\ln 2}{0,02} \approx 34,66$$

En consecuencia la población mundial se duplicará en 34,66 años. Observe que la respuesta final es independiente de la población actual.

Ejemplo 26

La densidad de población a x kilómetros del centro de una ciudad está dada por la función $D(r) = Ae^{-kr}$. Determinar la función si la densidad de población en el centro de la ciudad es de 15 000 personas por kilómetro cuadrado y la densidad a 10 kilómetros del centro es igual a 9 000 personas por kilómetro cuadrado.

Observe que en el centro de la ciudad $r = 0$, esto es, $D(0) = A = 15\,000$ personas por kilómetro cuadrado. De esto resulta que la función modeladora es:

$$D(t) = 15\,000e^{-rt}$$

Dividiendo por R_0 y tomando logaritmos en ambos miembros se obtiene:

$$ln\,\frac{1}{5} = -kt \Longleftrightarrow t = \frac{ln\,\frac{1}{5}}{k} = \frac{ln\,5}{k} \quad \text{y como} \quad k = \frac{ln\,2}{5\,730}$$

se halla que:

$$t = \frac{5\,730 ln\,5}{ln\,2} \approx 13\,304,65$$

De lo cual se concluye que el fósil tiene aproximadamente 13 304 años.

5.9 Ejercicios propuestos

1. Exprese lo siguiente en notación logarítmica.

   $a)\ 3^3 = 27 \quad b) 5^4 = 625 \quad c)\ 4^0 = 1 \quad d)\ 10^3 = 700 \quad e)\ 8^{\frac{4}{3}} = 16$

2. Encuentre por simple inspección el valor de x en las expresiones siguientes.

   $a)\ x = log_4 16 \quad b)\ x = log_7 1 \quad c)\ x = log_9 \frac{1}{9} \quad d)\ x = log_{\sqrt{6}} 36 \quad e) log_x 32 = -\frac{5}{7}$

3. Exprese como un simple logaritmo las expresiones:

   $a)\ log_a x + log_a y - log_a z \quad b)\ log_b(a+2) - log_b(a-3) \quad c) 4log\,4 - 3log\,y$

   $d)\ log_b 2x + 3(log_b x - log_b y) \quad e)\ -log_a x + 6log_a(x-1) + 3log_a x^2$

4. Resuelva las ecuaciones exponenciales.

   $a)\ 3^x = 27 \quad b)\ 3^{x+1} = 32^{x-7} \quad c)\ 5(6^x) = 21^{x-2} \quad d)\ e^x - e^{-x} = 2 \quad e)\ e^x + e^{-x} = 1$

5. Determine el valor de x.

   $a)\ log\,x - 2log\,4 = log\,32 \quad b)\ log\,(x+2) - log\,x = log\,12$

   $c)\ log\,(3x+2) = log\,(x-4) + 1 \quad d)\ 2,78^x = 7,38^{3x-1} \quad e)\ (3)^{2x} = 1$

6. Calcule cada una de las expresiones sin usar calculadora.

   $a)\ ln\,e^3 \quad b)\ ln\,\sqrt{e} \quad c)\ e^{ln\,5} \quad d)\ e^{2ln\,3} \quad e)\ e^{3ln\,2 - 2ln\,5} \quad f)\ ln e^3\sqrt{e}$

7. Resuelva para x la ecuación dada:

   $a)\ 2 = e^{0,06x} \quad b)\ \frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-1,2x} \quad c)\ 3 = 2 + 5e^{-4x} \quad d)\ -2ln\,x = b$

   $e) -ln\,x = \frac{t}{50} + C \quad f)\ ln\,x = 2(ln\,3 - ln\,5) \quad g)\ ln\,x = \frac{1}{3}(ln\,16 + 2ln\,2)$

5.10 Ejercicios propuestos

Utilice EL DERIVE para resolver los siguientes ejercicios.

1. **Crecimiento de bacterias.** Un laboratorista halló que si inicialmente habían 6 000 bacterias en un cultivo, después de 20 minutos el número de bacterias alcanzaba a 9 000. Use estos datos para determinar una función exponencial de la forma $Q(t) = Q_0 e^{kt}$ que exprese el número de bacterias como función del tiempo. Utilice **EL DERIVE** para trazar un gráfico de la función $N(t)$. Estime la población de bacterias cuando $t \longrightarrow 18$ minutos.

2. **Eficacia de trabajadores.** Un experto en productividad contratado por una firma industrial, halló que un trabajador sin experien-cia produce 150 unidades de producción por hora y después de 6 meses produce 410 unidades por hora. El experto cree que la producción está relacionada con la experiencia. Halle la función que modela dicho fenómeno de acuerdo con los datos observados. Utilice **EL DERIVE** para trazar un gráfico de la función.

3. **Crecimiento de población.** De acuerdo con un modelo logístico basado en el supuesto de que la tierra no puede soportar más de 40 mil millones de personas, la población del mundo (en miles de millones) viene dada por una función de la forma:
$$N(t) = \frac{40}{1 + Ce^{-kt}}$$
donde C y k son constantes positivas (t en años). Hallar la función que muestre que la población mundial era de 3 mil millones en 1960 y de 4 mil millones en 1975. Utilice **EL DERIVE** para trazar un gráfico de la función y estime la población para el año 2 000.

4. **Fechado por carbono.** Un arqueólogo ha encontrado un fósil, en la provincia de Atacama, en el que la razón de C^{14} a C^{12} es de $\frac{1}{3}$ de la razón encontrada en la atmosfera. ¿Qué edad tiene aproximadamente el fósil?

5. **Fechado por carbono.** ¿Qué edad tiene un fósil en que la razón de C^{14} a C^{12} es de $\frac{1}{2}$ de la razón encontrada en la atmosfera?

6. Resuelva las siguientes ecuaciones y verifique sus resultados utilizando **EL DERIVE**

   a) $3^{x+1} - 2 = 9^x$ *b*) $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{x+2} = 4$

19. Resuelva las ecuaciones siguientes y establezca al mismo tiempo el conjunto de valores de x para los cuales los logaritmos están bien definidos.

a) $2log\, x = 1 + log\,(x + \frac{11}{10})$ b) $log\sqrt[3]{7 - x} - log\,(3 - x) = 0$

20. considere la función solución del problema 3, página 147, y trace su gráfico y determine los siguientes límites:

$a)\ \lim_{t\to+\infty} N(t)$ $b)\ \lim_{t\to 0} N(t)$ $c)\ \lim_{t\to -1} N(t)$ $d)\ \lim_{t\to\frac{1}{2}} N(t)$ $f)\ \lim_{t\to 2} N(t)$

21. Considere la función solución del problema 15 de la página 148, trace su gráfico y determine los siguientes límites.

$a)\ \lim_{t\to 0} P(t)$ $b)\ \lim_{t\to 1} P(t)$ $c)\ \lim_{t\to+\infty} P(t)$ $d)\ \lim_{t\to\frac{1}{49}} P(t)$ $f)\ \lim_{t\to(t+1)} P(t)$

22. Considere la función del problema 12 de la página 148, trace su gráfico y determine los siguientes límites.

$a)\ \lim_{t\to 0} N(t)$ $b)\ \lim_{t\to -1} N(t)$ $c)\ \lim_{t\to-\infty} N(t)$ $d)\ \lim_{t\to-\frac{1}{2}} N(t)$ $f)\ \lim_{t\to+\infty} N(t)$

23. Considere la función del problema 126 de la página 114, trace su gráfico y determine los siguientes límites:

$a)\ \lim_{t\to -100} D(t)$ $b)\ \lim_{t\to -1} D(t)$ $c)\ \lim_{t\to-\infty} D(t)$ $d)\ \lim_{t\to-\frac{1}{5}} D(t)$ $f)\ \lim_{t\to+\infty} D(t)$

24. Considere la función del problema 8 de la página 126, trace su gráfico y determine los siguientes límites.

$a)\ \lim_{t\to 0} P(t)$ $b)\ \lim_{t\to -1} P(t)$ $c)\ \lim_{t\to+\infty} P(t)$ $d)\ \lim_{t\to-\frac{1}{2}} P(t)$ $f)\ \lim_{t\to+\infty} D(t)$

25. La presión del vapor de agua depende de la temperatura. La siguiente tabla, hallada experimentalmente, nos da la presión del vapor (en kilopascal) para valores correspondientes de la temperatura (en grados celsius).

Presión	1.19	2,33	7,34	19,9	47,3	101	199	361	617
Temperatura	10	20	40	60	80	100	120	140	160

Trace la nube de puntos y mediante una aproximación logarítmica mínimo cuadrática calcule la presión para una temperatura de 67 grados. ¿Qué ocurre cuando $t \to 0$

5.11 El DERIVE

5.11.1 Ajuste de la función logaritmo.

Ejemplo 1

Trace el gráfico de la nube de puntos de la tabla siguiente y construya y trace la función logarítmica mínimo cuadrática.

x	y
1,00	0,0029
1,50	0,0064
2,00	0,0112
3,00	0,0243
4,00	0,0416
5,00	0,0625
10,0	0,2000
15,0	0,3380
20,0	0,4000

1. En **Command** : ponga el cursor en **Declare** y presione la tecla Enter.
2. Aparece **Declare** : Function, Variable, Matrix, Vector. Ponga el cursor en Matrix y presione la tecla **Enter**
3. Aparece **Declare Matrix** : Rows Columns. Al lado derecho de Rows escriba 9 y al lado derecho de Columns escriba 2. Para pasar de uno a otro lado se usa el tabulador. Observe que los datos forman una matríz de 9 filas y 2 columnas. Presione la tecla **Enter**

$$2 : Fit\,[x, k\ln(x)]\,, \left|\begin{array}{ll} 1{,}00 & 0{,}0029 \\ 1{,}50 & 0{,}0064 \\ 2{,}00 & 0{,}0112 \\ 3{,}00 & 0{,}0243 \\ 4{,}00 & 0{,}0416 \\ 5{,}00 & 0{,}0625 \\ 10{,}0 & 0{,}2000 \\ 15{,}0 & 0{,}3380 \\ 20{,}0 & 0{,}4000 \end{array}\right|$$

Ponga el cursor en **Simplify** y luego presione la tecla **Enter**. En la parte inferior aparece **Command** y en la parte superior de la pantalla aparece 3: $\frac{2\,747}{27\,747}\,ln\,x \Longleftrightarrow 0{,}00990016\,ln\,x$ que es la ecuación pedida.

6. Para graficar la nube de puntos en el Sistema Cartesiano de Coordenadas, coloque en **blanco** la matríz de puntos, a continuación ponga el cursor en **Plot**, presione la tecla **Enter** y efectúe la siguiente sucesión de operaciones. a) Overlay Enter b) Option Enter c) State Enter d) Rectangular Enter e) Plot Enter. En la parte superior de la pantalla aparece la nube de puntos. Presione la tecla Enter.

7. Para graficar la función coloque en blanco la función hallada, presione la tecla Enter y repita la sucesión de operaciones desde (a) hasta (e). En la parte superior de la pantalla aparece el gráfico de la ecuación hallada.

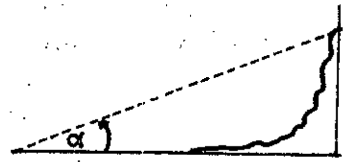
8. Nota. El lector debe tener sumo cuidado en la elección de la escala en los ejes coordenados. Una incorrecta elección de dicha escala puede conducirlo a una visión equivocada de la nube de puntos y del ajuste que se busca. Los puntos pueden ajustarse, también, utilizando otra base, por ejemplo, la base 10.

En el año 332 antes de Cristo, Egipto cayó en las manos de **Alejandro Magno (356-323 a.C)** quien, para honrarse a sí mismo, ese mismo año, hizo construir la ciudad de **Alejandría**. Muerto Alejandro, y repartido su imperio, Alejandría quedó bajo el dominio de Ptolomeo, uno de sus generales. Para celebrar su ascensión al poder, Ptolomeo, fundó en la ciudad el primer centro cultural organizado de la humanidad: museo, biblioteca y universidad, produciéndose aquí el más asombroso florecimiento de la vida intelectual que jamás haya existido en el mundo. Egipto estuvo gobernado por la dinastía de los **ptolomeos** hasta que cayó en manos de los romanos.

Las primeras constribuciones alejandrinas al conocimiento de la humanidad se refieren a la invención de la trigonometría, cuestión que significó, devolver a la geometría, las mediciones y el uso de los números. Esta fue otra de las conquistas de la matemática por acercarse a los fenómenos de la vida real. Inventando los primeros conceptos trigonométricos, **Aristarco de Samos (310-230 a.C)**, hizo las primeras estimaciones de las distancias de la luna y del sol a la tierra.

Otra articulación de la matemática con el mundo real, en que interviene la trigonometría, la hizo **Hiparco (150 a.C)** al estudiar la posición en la esfera celeste de 1080 estrellas. Arquímedes **(287-212 a.C)** había montado, muchos años antes, el primer modelo conocido para representar la rotación de la esfera celeste y las posiciones variables de las estrellas. Es posible que el mismo Arquímedes fuese el primero en aplicar rudimentarias tablas de senos, cosenos y tangentes. Hiparco hizo lo mismo 100 años más tarde, construyó una tabla de senos y la usó para hallar la distancia entre la tierra y la luna.

Cuando Alejandría pasó a formar parte del Imperio Romano, ya habían sido determinadas, con ayuda de una incipiente trigonometría, las distancias de la tierra al sol y a la luna, así como los radios y circunferencia de los tres astros. **Eratóstenes (275-194 a.C)** determinó la longitud de la circunferencia de la tierra con un error de 80 kilómetros. Para los griegos y egipcios, que desarrollaron estas herramientas, fue sencillo determinar las alturas de alcantilados como los de la figura siguiente.



El procedimiento supone que es posible acercarse a la base del cerro lo suficiente para poder medir los ángulos en la posición que se indican.

6.2 Las razones trigonométricas

Los modelos estáticos

Dado un triángulo rectángulo ABC se pueden definir seis razones trigonométricas entre sus lados, para cada uno de sus ángulos agudos. En la tabla (1) se definen dichas razones para el ángulo alfa.

$$sen\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

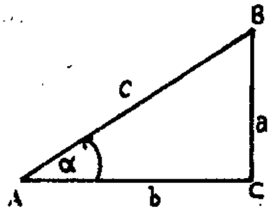
$$cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$tan\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$csc\ \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

$$sec\ \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$cot\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$



fig(1)

Ejemplo 1

Considere el triángulo rectángulo de la figura (1) y suponga que los catetos menor, mayor e hipotenusa miden 8, 15 y 17 cm respectivamente. Halle el valor aproximado (a un decimal por defecto) de seno, coseno y tangente del ángulo alfa.

SOLUCIÓN. De acuerdo a las definiciones de la tabla (1) resulta que:

$$a)\ sen\ \alpha = \frac{8}{17} \approx 0,4 \quad b)\ cos\ \alpha = \frac{15}{17} \approx 0,6 \quad c)\ tg\ \alpha = \frac{8}{15} \approx 0,5$$

En lo que sigue estudiaremos algunas propiedades de las razones trigonométricas que nos permitirán resolver en el futuro una gran variedad de problemas de otras disciplinas.

SOLUCIÓN. El teorema de Pitágoras nos asegura que $a^2 + b^2 = c^2$. Dividiendo esta expresión por c^2 resulta:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1, \quad \text{esto es} \quad (i) \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Del mismo triángulo se deduce que:

$ii)$ $sen\ \alpha = \frac{a}{c}$, por lo tanto, $sen^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2$

$iii)$ $cos\ \alpha = \frac{b}{c}$, por lo tanto, $cos^2\alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2$

Reemplazando las igualdades ii) y iii) en la expresión (i) se obtiene que

$$(*) \quad sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$$

La identidad (*) significa que la igualdad se mantendrá, cualesquiera que sea el ángulo alfa al cual se le apliquen ambas funciones.

Conviene aclarar algunas convenciones de notación. Así, por ejemplo,

$$a) \ sen^n\alpha = (sen\alpha)^n \quad b) \ cos^n\alpha = (cos\ \alpha)^n \quad c) \ tg^n\alpha = (tg\ \alpha)^n$$

De tal modo que, en particular, se tiene que:

$$a) \ sen^2\alpha = (sen\ \alpha)^2 \quad b) \ cos^2\alpha = (cos\ \alpha)^2 \quad c) \ tg^2\alpha = (tg\ \alpha)^2$$

Así, por ejemplo, de $(sen\ 18^0)^2 + (cos\ 18^0)^2$, resulta:

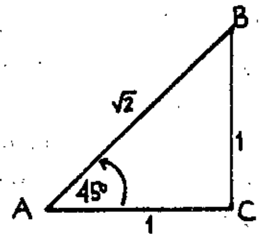
$$a) \ sen^2 18^0 + cos^2 18^0 \approx (0,309)^2 + (0,951)^2 = 0,0954 + 0,9044 \approx 1$$

6.3 Ejercicios propuestos

1. Considere un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 cm, y calcule las seis razones trigonométricas de los ángulos agudos.

2. Halle los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos alfa y beta, del triángulo rectángulo ABC de la figura (5).

La figura (8) muestra el triángulo rectángulo isósceles ABC, del cual se pueden calcular las funciones trigonométricas para el ángulo de 45^0. Conviene precisar que los valores de las funciones no variarán si los lados del cuadrado ABCD tienen otras dimensiones. Aplicando la definición de cada una de las funciones al ángulo de 45^0 resulta:

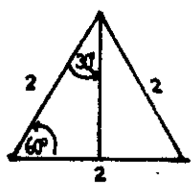


fig(8)

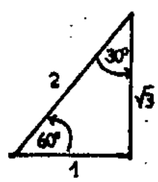
$a)$ $sen\ 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad b)$ $cos\ 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad c)$ $tg\ 45^0 = 1$

$d)$ $csc\ 45^0 = \sqrt{2}$ $\quad d)$ $sec\ 45^0 = \sqrt{2}$ $\quad e)$ $ctg\ 45^0 = 1$

Para calcular las funciones trigonométricas de los ángulos de 30^0 y 60^0, se recurre a un triángulo equilátero como el de la figura (9).



fig(9)



fig(10)

Como las longitudes de los lados del triángulo no afectan las razones entre ellos, para mayor comodidad en los cálculos se han elegido dos unidades por lado. Del triángulo de la figura (9) se desprende el triángulo rectángulo ADC de la figura (10).

La longitud del lado DC (altura del triángulo equilátero ACB) se puede calcular utilizando el Teorema de Pitágoras. Y aplicando las definiciones de las funciones se obtienen los resultados de la tabla siguiente:

	sen	cos	tg	csc	sec	ctg
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tabla (2)

Para hallar la medida del ángulo alfa podíamos haber utilizado cualesquiera de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, tomando la función tangente resulta:

$$\text{Si } tg\, \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ entonces, } \alpha = 30^0$$

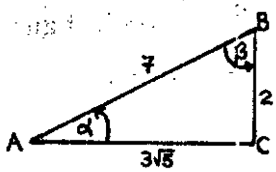
Pero, ¿qué sucede cuando el triángulo, al cual queremos conocer sus ángulos o sus lados no es equilátero ni rectángulo isósceles?

El algoritmo para calcular la medida de los ángulos internos de un triángulo cuando se trata de triángulos rectángulos cualesquiera se muestra en el ejemplo 5.

Ejemplo 5

Considere el triángulo de la figura (12) y determine la medida de los ángulos alfa y beta.

fig(12)



SOLUCIÓN. Aunque podemos usar cualesquiera de las funciones usaremos en ambos casos la función seno. En efecto, puesto que $sen\ \alpha = \frac{2}{7}$, se tiene:

a) $\boxed{2}\ \boxed{:}\ \boxed{7} \approx 0{,}2857\ \boxed{\text{shift}}\ \boxed{\text{sin}} \approx 16{,}60^0$

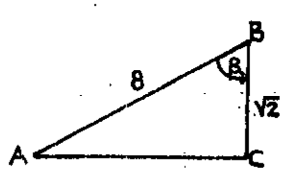
En la misma forma, puesto que $sen\ \beta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, se tiene:

b) $\boxed{\sqrt{5}}\ \boxed{x}\ \boxed{3}\ \boxed{:}\ \boxed{7} \approx 0{,}9583\ \boxed{\text{shift}}\ \boxed{\text{sin}} \approx 73{,}39^0$

Note que la suma de ambos ángulos agudos es un poco menor de 90^0. Esto se debe a que todos los cálculos han sido aproximado a cuatro decimales, por defecto.

Ejemplo 6

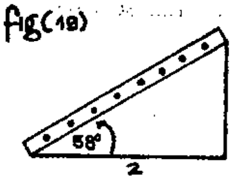
Utilizando la función coseno determine el ángulo beta en el triángulo ABC de la figura (13).

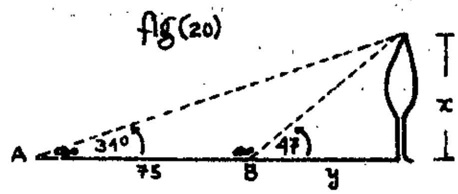


fig(13)

6. La pirámide de 80 m de altura de la figura (18), proyecta una sombra de 100 m de longitud. ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol?

7. La escalera de la figura (19) está apoyada contra la pared de una casa de modo que desde el pie de la escalera a la pared hay 2 metros. ¿A qué altura del suelo se encuentra el extremo superior de la escalera y cual es su longitud si forma un ángulo de 58^0 con el suelo?





8. Desde un punto colocado a una distancia de 50 metros de la base de una torre se halló que el ángulo de elevación del extremo superior de la torre es de 45^0. Calcule la altura de la torre.

9. Considere el arbol de la figura (20) y una tortuga que se mueve en dirección al tronco desde el punto A al punto B. Halle la altura del árbol si el ángulo de elevación de su extremo superior crece desde 31^0 hasta 47^0 cuando la tortuga avanza 75 metros desde A hasta B.

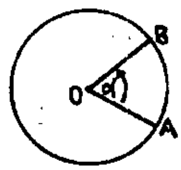
10. La base de un triángulo isósceles mide 20 cm y los ángulos de la base miden 48^0. Halle la longitud de los los lados iguales.

11. Calcule el área del triángulo rectángulo si el cateto a=12,5 cm y el ángulo $\alpha = 28^0$.

12. Calcule el área del triángulo ABC si el cateto b=17 cm y el ángulo $\alpha = 31^0$.

la medida de un ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a la longitud del radio del círculo. En la figura (25) la longitud del arco AB es igual a la longitud del radio del círculo.

fig(25)



OB = longitud de $\overset{\frown}{AB}$

$\measuredangle \alpha = 1$ radián

¿Qué relación hay entre ambas forma de medir ángulos?

Con frecuencia trabajaremos indistintamente con cualesquiera de ellas, de tal manera que debemos determinar un método para pasar de un sistema a otro.

Sabemos que la longitud de la circunferencia es igual a $2\pi r$, esto es:

$$\ell = 2\pi r$$

esto significa que:

$$\frac{\ell}{r} = 2\pi$$

Es decir, la razón entre la longitud de la circunferencia y su radio es igual a 2π radianes. Como una circunferencia subtiende un ángulo central de 360^0, resulta que:

$$2\pi \text{ radianes} = 360^0$$

o lo que es lo mismo

$$\pi \text{ radianes} = 180^0$$

De esto se desprende que :

$$1 \text{ radián} = \frac{180^0}{\pi} = \frac{180^0}{3,14159} \approx 57,2958^0$$

Usted puede verificar que:

$$1 \text{ radián} \approx 57^0\ 17'\ 45"$$

Por otra parte, puesto que $180^0 = \pi$ radianes, se tiene que:

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radián } \approx 0,017453 \text{ radián}$$

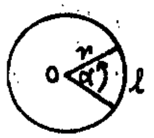
Para reducir grados a radianes, o radianes a grados, podemos utilizar cualesquiera de las igualdades de la equivalencia siguiente:

$$180^0 = \pi \text{ radianes} \Longleftrightarrow 1^0 = \frac{\pi}{180} \text{radián}$$

6.9 Longitud de arco

Si en una circunferencia de radio **r**, fig(26), se conoce la medida del ángulo central, se puede determinar la longitud del arco que subtiende dicho ángulo mediante la expresión, $\ell_a = r \cdot \alpha$

fig(26)



Dicho en palabras: longitud de arco = radio · ángulo central en radianes

Ejemplo 9

Determine la longitud del arco de circunferencia de radio r=12 cm, subtendido por un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radián.

SOLUCIÓN. Aplicando la fórmula propuesta, se tiene:

$$\ell = 12 \cdot \frac{\pi}{3} = 4\pi\ cm \approx 12,57\ cm$$

Observación. Con frecuencia tiende a confundirse la medida de un ángulo dado en el sistema sexagesimal con un número real. Por ejemplo, 30^0 **no es igual** al número real 30. En cambio el ángulo $\frac{\pi}{3}$ rad es el número real aproximado $\frac{3{,}1416}{3}$.

6.10 Ejercicios propuestos

1. Exprese en radianes los siguientes ángulos.

   a) 45^0 *b*) 30^0 *c*) 18^0 *d*) $57^0\ 30'$ *e*) 105^0 *e*) $14^0\ 24'$ *f*) $22^0\ 30'$ *g*) $78^0\ 45'$

   y exprese su valor como un número real aproximado.

2. Exprese los siguientes ángulos expresados en radianes, en medida sexagesimal. *a*) $\frac{3\pi}{4}$ *b*) $\frac{7\pi}{45}$ *c*) $\frac{5\pi}{27}$ *d*) $\frac{5\pi}{24}$ *e*) $\frac{12\pi}{5}$

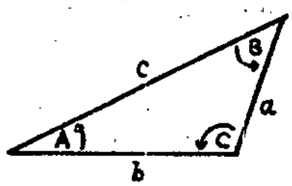
3. Exprese en radianes cada uno de los ángulos siguientes. *a*) 135^0 *c*) 210^0 *d*) 25^0

4. Exprese en grados, minutos y segundos cada uno de los siguientes ángulos. *a*) $\frac{5\pi}{9}\ rad$ *b*) $\frac{2}{5}\ rad$ *c*) $\frac{4}{3}\ rad$

6.11 Resolución de triángulos oblicuángulos

Hasta ahora hemos analizado problemas en los cuales era necesario resolver triángulos rectángulos. Sin embargo en una gran variedad de situaciones se necesita determinar ángulos o lados de triángulos oblicuángulos.

Un triángulo oblicuángulo es aquel en que ninguno de sus ángulos es recto. Esto significa que los tres ángulos son agudos, o dos son agudos y el tercero es obtuso. En la figura siguiente los ángulos se llaman A, B y C y los lados opuestos son, respectivamente, a, b y c.



Un triángulo queda perfectamente determinado si se conocen tres cualesquiera de sus elementos. En lo que sigue estudiaremos los siguientes cuatro casos de resolución de triángulos oblicuángulos.

1. Dados un lado y dos ángulos
2. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
3. Dados dos lados y el ángulo comprendido.
4. Dados los tres lados.

En lo que sigue daremos, sin demostración, la **ley de los senos**, que permite resolver los triángulos en los dos primeros casos.

6.11.1 Ley de los senos. En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, es decir:

$$\frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$$

De esta expresión se desprenden de inmediato las siguientes relaciones:

$$i)\ \frac{a}{sen\,A} = \frac{b}{sen\,B} \qquad ii)\ \frac{a}{sen\,A} = \frac{c}{sen\,C} \qquad iii)\ \frac{b}{sen\,B} = \frac{c}{sen\,C}$$

Resulta que

$$sen\, B = \frac{b\, sen\, C}{c} = \frac{480\, sen\, 55^0 10'}{628} = \frac{480\,(0,8208)}{628} = 0,6274$$

Luego, puesto que $sen\, B = 0,6274$, entonces, $\angle B = 38^0 50'$. Para determinar la longitud del lado a, sabemos que $\angle A = 86^0$, en consecuencia:

$$a = \frac{b\, sen\, A}{sen\, B} = \frac{480\, sen\, 86^0}{sen\, 38^0 50'} = \frac{480\,(0,9976)}{0,6271} = 764$$

Por lo tanto, el triángulo está completamente resuelto. Para resolver los triángulos en los cuales se dan dos lados y el ángulo comprendido, o los tres lados, se utiliza la ley de los cosenos.

6.11.2 Ley de los cosenos.

En todo triángulo ABC, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido, es decir:

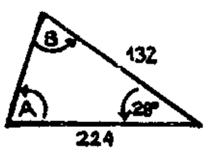
$$(1)\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$(2)\quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$(3)\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Ejemplo 12

Resolver el el triángulo ABC dados $a = 132$, $b = 224$ y $c = 28^0$



SOLUCIÓN. Para resolver este triángulo utilizamos la expresión

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Por lo tanto:

$$c^2 = (132)^2 + (224)^2 - 2\,(132)(224)\cos 28^0 40'$$

6.12 Ejercicios propuestos

Resolver cada uno de los triángulos utilizando la ley de los senos.

1. $a = 20,\ B = 30^0,\ C = 80^0$
2. $B = 45^0,\ c = 3,47,\ A = 30^0$
3. $b = 75,3,\ c = 132,\ C = 31^0 19'$a
4. $a = 4,7,\ b = 15,\ B = 31^0 24'$
5. $a = 3,\ A = 25^0,\ c = 7,5$

Resolver cada uno de los triángulos utilizando la ley de los cosenos o la ley de los senos.

1. $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$
2. $a = 5,\ b = 7,\ c = 10$
3. $a = 9,9171,\ b = 19,912,\ c = 16,814$
4. $A = 14^0,\ b = 4,9173,\ c = 6,2057$
5. $A = 13^0,\ b = 5,3437,\ c = 7,9281$

Ejemplo 15

Compruebe las siguientes identidades:

a) $sec\ x - sec\ x\ sen^2x = cos\ x$ b) $(sen\ x + cos\ x)^2 + (sen\ x - cos\ x)^2 = 2$

c) $sen\ x\ sec\ x\ ctg\ x = 1$ d) $tg^2\ x\ cos\ x + ctg^2x\ sen^2x = 1$

e) $sen^2x\ sec^2x\ - sec^2x = -1$ f) $sen^2x\ (1 + ctg^2x) = 1$

SOLUCIÓN. Utilizando las identidades básicas se tiene:

a) $sec\ x - sec\ x\ sen^2x = sec\ x\ (1 - sen^2x) = sec\ x\ cos^2x = cos\ x$

b) $(sen\ x + cos\ x)^2 + (sen\ x - cos\ x)^2 = sen^2x + 2sen\ x\ cos\ x + cos^2x$

$+sen^2x - 2sen\ x\ cos\ x + cos^2x = 2(sen^2x + cos^2x) = 2$

c) $sen\ x\ sec\ x\ ctg\ x = sen\ x \cdot \frac{1}{cos\ x} \cdot \frac{cos\ x}{sen\ x} = 1$

d) $tg^2\ x\ cos^2x + ctg^2x\ sen^2x = \frac{sen^2x}{cos^2x} \cdot cos^2x + \frac{cos^2x}{sen^2x} \cdot sen^2x =$

$= sen^2x + cos^2x = 1$

e) $sen^2x\ sec^2x\ - sec^2x = sec^2x(sen^2x - 1) = -sec^2x(1 - sen^2x) =$

$-sec^2x \cdot cos^2x = -\frac{1}{cos^2x} \cdot cos^2x = -1$

f) $sen^2x\ (1 + ctg^2x) = sen^2x \cdot csc^2x = sen^2x \cdot \frac{1}{sen^2x} = 1$

6.14 Identidades de mayor complejidad

Ejemplo 16

Resuelva: a) $sec^2x + csc^2x = sec^2x \cdot scc^2x$ b) $tg^4x + tg^2x = sec^4x - sec^2x$

SOLUCIÓN. Aplicando las identidades básicas se tiene:

$$a)\quad sec^2x + csc^2x = \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{sen^2x} = \frac{sen^2x + cos^2x}{cos^2x\ sen^2x} = \frac{1}{cos^2x\ sen^2x}$$

$$= \frac{1}{cos^2x} \cdot \frac{1}{sen^2x} = sec^2x\ csc^2x$$

Ejemplo 18

Resuelva las ecuaciones trigonométricas. a) $sen\ x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ b) $cos\ x - \frac{1}{2} = 0$

SOLUCIÓN. En cada caso debemos determinar un ángulo **x** que satisfaga la igualdad propuesta; es decir, un ángulo que al remplazarlo en la ecuación haga que ésta sea igual a cero. Sabemos que $sen\ 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de tal modo que la ecuación se satisface para $x = 45^0$. Resulta entonces que:

$$a)\quad senx - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \iff \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

por lo tanto, la solución de la ecuación es $x = 45^0$.

Por otra parte: $b)\ cosx - \frac{1}{2} = 0 \iff x = 30^0$. En efecto, puesto que $cos\ 30^0 = \frac{1}{2}$ resulta que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. En consecuencia la solución es $x = 30^0$

Ejemplo 19

Resuelva las ecuaciones: a) $2sen\ x = csx\ x$ b) $tg\ = 3ctg\ x$

SOLUCIÓN. Aunque no existe un método definido para resolver ecuaciones trigonométricas, siempre conviene reducir todas las funciones a una misma función. Así, por ejemplo, en la primera ecuación reduciremos la función $cscx$ a una función en términos de $senx$. Resulta entonces que:

$$a)\quad senx = cscx \iff 2senx = \frac{1}{senx},\ \text{de lo cual resulta que: } 2sen^2x = 1$$

Podemos escribir ahora:

$$sen^2x = \frac{1}{2} \iff senx = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Observe que hemos hallado dos valores para el mismo ángulo. Hasta ahora hemos estudiado las funciones trigonométricas para ángulos comprendidos en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Cuando analicemos las funciones trigonométricas para ángulos comprendidos en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ estudiaremos el significado de la expresión $senx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Por ahora sabemos que la función seno varía entre 0 y 1, esto es,

$$0 \leq sen\ x \leq 1$$

4. Verifique las siguientes identidades

   a) $(1 - cos^2 x) \cdot csc^2 x = 1$ b) $(1 - sen^2 x) \cdot sec^2 x = 1$

   c) $ctg^2 x \cdot (1 - cos^2 x) = cos^2 x$ d) $(1 - cos^2 x) \cdot sec^2 x = tg^2 x$

   e) $tg\, x \cdot \sqrt{1 - sen^2 x} = sen\, x$ f) $(1 + tg^2 x) \cdot cos\, x = 1$

   g) $(1 - cos^2 x)(1 + tg^2 x) - tg^2 x = 0$ h) $sen^2 x \cdot (1 + ctg^2 x) - 1 = 0$

   i) $cos\, x \cdot \sqrt{ctg^2 x + 1} - \sqrt{csc^2 x - 1} = 0$ j) $sen^2 x \cdot ctg^2 x + sen^2 x - 1 = 0$

   k) $(1 + tg^2 x)(1 - sen^2 x) - 1 = 0$ l) $sen^2 x \cdot sec^2 x - sec^2 x - 1 = 0$

5. Verifique las siguientes identidades

   a) $sec^2 x + csc^2 x = sec^2 x \cdot csc^2 x$ b) $tg^4 x + tg^2 x = sec^4 x - sec^2 x$

   c) $\frac{sen\, x}{1+cos\, x} + \frac{1+cos\, x}{sen\, x} = 2csc\, x$ d) $\frac{cos\, x}{1+sen\, x} = \frac{1-sen\, x}{cos\, x}$ e) $\frac{sec\, x - csc\, x}{sec\, x + csc\, x} = \frac{tg\, x - 1}{tg\, x + 1}$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones

   a) $cos^2 x = \frac{1}{2}$ b) $tg\, x = -1$ c) $sen\, x \cdot \cos\, x = 0$ d) $(tg\, x - 1)(2sen\, x + 1) = 0$

   e) $2sen^2 x - sen\, x - 1 = 0$ f) $2tg\, x \cdot sen\, x - tg\, x = 0$.

   h) $2sen\, x + csc\, x = 3$ i) $sen\, x + 1 = cos\, x$ j) $sec\, x - 1 = tg\, x$

   k) $2cos\, x + 3sen\, x = 2$ l) $3sen\, x + 5cos\, x + 5 = 0$ m) $1 + sen\, x = 2cos\, x$

   n) $(tg\, x - 1)(4sen^2 x - 3) = 0$ o) $3cos^2 x = sen^2 x$ p) $2sen\, x - csc\, x = 1$

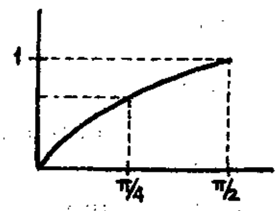
   q) $cos\, x - \sqrt{3} sen\, x = 1$ r) $2cos\, x = 1 - sen\, x$

7. Halle los puntos donde las curvas cortan al eje X y al eje Y.

   a) $y = 2sen^2 x + 3cos\, x$ b) $y = sen\, x + cos\, x - 1$ c) $y = 2cos^2 x - sen\, x$

Una tabla de valores y un gráfico aproximado de la función seno en dicho dominio es el siguiente:

α	y
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1



Para la función coseno: cuando $\alpha \longrightarrow 0$, entonces $cos\,\alpha \longrightarrow 1$

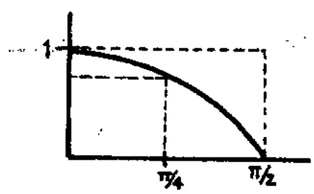
y cuando $\alpha \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ entonces $cos\,\alpha \longrightarrow 0$

De esto se desprende que el dominio y ámbito de la función coseno son los intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $[0,1]$ respectivamente. Por lo tanto escribimos:

$$b)\quad cos:\ [0,\frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0,1],\ \text{tal que},\ y = cos\,\alpha$$

Una tabla de valores y un gráfico aproximado de la función coseno en el dominio indicado es:

α	y
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0

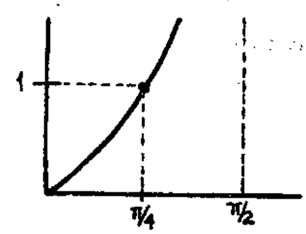


Observe que $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$ y puesto que $cos\ \frac{\pi}{2} = 0$, se deduce que la función tangente no está definida para $\alpha = \frac{\pi}{2}$. En consecuencia:

$$c)\quad tg:[0,\frac{\pi}{2}[\longrightarrow I\!R^{+}\cup\{0\},\ \text{y tal que},\ y = tg\ \alpha$$

Para la función tangente se tiene:

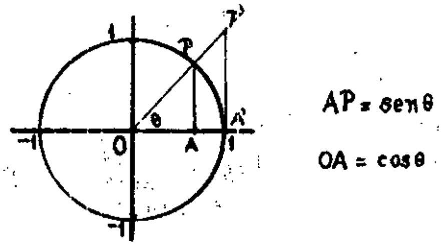
α	y
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	no existe



6.19 El círculo trigonométrico

Recordemos que las razones entre los lados de un triángulo rectángulo no cambian si variamos las longitudes de sus lados. De tal modo que si usamos triángulos rectángulos cuya hipotenusa mida la unidad, los cálculos se nos facilitarán enormemente. Fig(38)

fig(38)



Observe que el punto $P(x, y)$ está ubicado en una circunferencia de radio igual a la unidad. Si definimos las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo OAP resulta lo siguiente:

$a)\ sen\ \theta = \dfrac{AP}{OP}$ y puesto que OP=1, resulta: $sen\ \theta = AP$

$b)\ cos\ \theta = \dfrac{OA}{OP}$ y puesto que OP=1, resulta: $cos\ \theta = OA$

$c)\ tg\,\theta = \dfrac{A'P'}{OA'}$ y puesto que OA'=1, resulta: $tg\ \theta = A'P'$

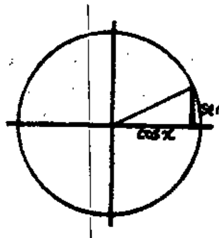
De lo anterior se desprende que cuando el radio de la circunferencia es igual a la unidad los valores de las funciones seno, coseno y tangente son iguales a la longitud de los segmentos AP, OA y A'P' respectivamente. Estas mismas consideraciones son válidas para las funciones secante, cosecante, cotangente.

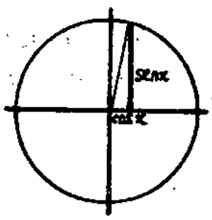
6.20 El signo de las funciones seno, coseno y tangente

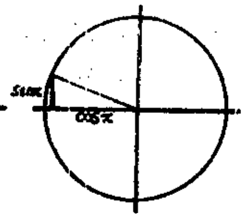
Una pregunta de interés que debemos contestar es la siguiente: ¿qué signo adquieren los valores de las funciones seno, coseno y tangente, a medida que el ángulo θ crece desde cero grado hasta 360 grados.

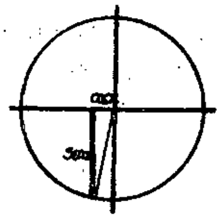
La figuras (39) muestran que el signo de las funciones dependen del cua-drante donde esté ubicado el ángulo. Así, por ejemplo, si el ángulo θ está en el primer cuadrante, las tres funciones son positivas. En cambio, en el segundo cuadrante, la

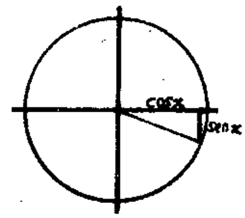
360 grados, la linea trigonométrica del seno tiende a cero y la del coseno tiende a 1. fig (44).


fig(40)


fig(41)


fig(42)


fig(43)


fig(44)

Expresando formalmente estas ideas podemos escribir lo siguiente:

a) si $\theta \longrightarrow 0$ entonces, $sen\,\theta \longrightarrow 0$; $cos\,\theta \longrightarrow 1$ y $tg\,\theta \longrightarrow 0$

b) si $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ entonces, $sen\,\theta \longrightarrow 1$; $cos\,\theta \longrightarrow 0$ y $tg\,\theta \longrightarrow -\infty$

c) si $\theta \longrightarrow \pi$ entonces, $sen\,\theta \longrightarrow 0$; $cos\,\theta \longrightarrow -1$ y $tg\,\theta \longrightarrow 0$

d) si $\theta \longrightarrow \frac{3\pi}{2}$ entonces, $sen\,\theta \longrightarrow -1$; $cos\,\theta \longrightarrow 0$ y $tg\,\theta \longrightarrow +\infty$

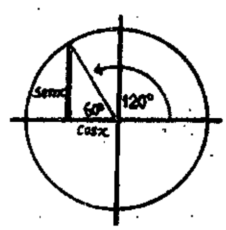
e) si $\theta \longrightarrow 2\pi$ entonces, $sen\,\theta \longrightarrow 0$; $cos\,\theta \longrightarrow 1$ y $tg\,\theta \longrightarrow 0$

En una tabla la información quedaría en la forma siguiente:

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
seno	0	1	0	-1	0
coseno	1	0	-1	0	1
tangente	0	no def.	0	no def.	0

6.22 Fórmulas de reducción de funciones a ángulos agudos positivos.

Hemos visto que un ángulo puede pertenecer a cualesquiera de los cuadrantes del círculo trigonométrico. Consideremos, por ejemplo, un ángulo de 120^0, como el de la figura (45), y analicemos las funciones seno, coseno y tangente para dicho ángulo. De la figura se desprende que:



fig(45)

a) $sen\,120^0 = sen\,60^0$ (la función $sen\,\theta$ es positiva en el segundo cuadrante)

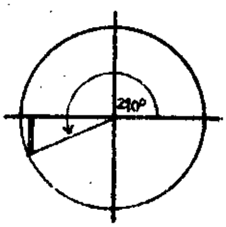
a) $sen\,150^0 = sen\,(180-30) = sen\,30^0 = \frac{1}{2}$

b) $cos\,150^0 = cos\,(180-30) = -cos\,30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $tg\,150^0 = tg\,(180-30) = -tg\,30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

La ventaja de reducir las funciones de ángulos del segundo, tercer y cuarto cuadrante, a funciones de ángulos del primer cuadrante, se debe a la facilidad con la cual podemos efectuar esta última tarea. De hecho, las **tablas de funciones trigonométricas** mostraban solamente los valores de las funciones para los ángulos agudos. Actualmente, utilizando la calculadora manual, se obtienen directamente los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo. Sin embargo por la naturaleza periódica de las funciones trigonómetricas es conveniente precisar este concepto.

Supongamos ahora que queremos calcular las funciones trigonométricas seno coseno y tangente, para el ángulo de 210^0. La figura (46) muestra a dicho ángulo ubicado en el tercer cuadrante.



fig(46)

El gráfico muestra que el cálculo de las funciones seno, coseno y tangente de 210^0 se puede reducir al cálculo de las funciones del ángulo de 30^0. Es decir:

a) $sen\,210^0 = -sen\,30^0$ (la función $sen\,\theta$ es negativa en el tercer cuadrante)

b) $cos\,210^0 = -cos\,30^0$ (la función $cos\,\theta$ es negativa en el tercer cuadrante)

c) $tg\;210^0 = tg\,30^0$ (la función $tg\,\theta$ es positiva en el tercer cuadrante)

Observe que podemos escribir: a) $sen\,210^0 = sen\,(180^0+30^0) = -sen\,30^0$

b) $cos\,210^0 = cos\,(180^0+30^0) = -cos\,30^0$

c) $tg\,210^0 = tg\,(180^0+30^0) = tg\,30^0$

Estos resultados nos sugieren que para calcular el valor de una función para un ángulo del tercer cuadrante, podemos reducirlo a la misma función, pero de un

b) $\cos 330^0 = \cos 30^0$ (la función $\cos\theta$ es positiva en el cuarto cuadrante)

c) $tg\ 330^0 = -tg\, 30^0$ (la función $tg\,\theta$ es negativa en el cuarto cuadrante)

Observe que podemos escribir: a) $sen\, 330^0 = sen\,(360^0 - 30^0) = -sen\, 30^0$

b) $\cos 330^0 = \cos(360^0 - 30^0) = \cos 30^0$

c) $tg\, 330^0 = tg\,(360^0 - 30^0) = -tg\, 30^0$

Estos resultados nos sugieren que para calcular el valor de una función para un ángulo del cuarto cuadrante, podemos reducirlo a la misma función, pero de un ángulo del primer cuadrante. Escrito en símbolos:

(13) $\boxed{sen\,(360^0 - \theta) = -sen\,\theta}$ (16) $\boxed{ctg\,(360^0 - \theta) = -ctg\,\theta}$

(14) $\boxed{\cos(360^0 - \theta) = \cos\theta}$ (17) $\boxed{\sec(360^0 - \theta) = \sec\theta}$

(15) $\boxed{tg\ (360^0 - \theta) = -tg\,\theta}$ (18) $\boxed{\csc(360^0 - \theta) = -\csc\theta}$

¿Cómo expresar las funciones de ángulos mayores de 360^0 en términos de un ángulo agudo ?

Ejemplo 23

SOLUCIÓN.

a) $sen\, 280^0 = sen\,(360^0 - 80^0) = -sen\, 80^0 = -0,984$

b) $\cos 280^0 = \cos(360^0 - 80^0) = \cos 80^0 = 0,173$

c) $tg\, 280^0 = tg\,(360^0 - 80^0) = -tg\, 80^0 = -5,671$

Ejemplo 24

Exprese $sen\, 580^0$, $\cos 645^0$ y $tg\, 780^0$ como funciones de ángulos agudos.

SOLUCIÓN. Notemos que el ángulo de 580^0 está en el tercer cuadrante.

a) En la figura (48), puesto que el signo de la función seno es negativo en el

Puesto que la función tangente es positiva en dicho cuadrante, resulta: $tg\,(-880) = tg\,(-5 \cdot 180^0 + 20) = tg\,20^0$

Ejemplo 26

a) $csc\,(-321) = csc\,(-360^0 + 39^0) = csc\,39^0$

b) $sec\,(-210^0) = sec\,(-180^0 - 30^0) = sec\,30^0$

c) $ctg\,(-400^0) = ctg\,(-360^0 - 40^0) = -ctg\,40^0$

Por último, las fórmulas de reducción para los ángulos coterminales, donde n es un entero positivo, negativo o cero, son las siguientes:

$sen\,(\theta + n \cdot 360^0) = sen\,\theta$		$ctg\,(\theta + n \cdot 360^0) = ctg\,\theta$
$cos\,(\theta + n \cdot 360^0) = cos\,\theta$		$sec\,(\theta + n \cdot 360^0) = sec\,\theta$
$tg\,(\theta + n \cdot 360^0) = tg\,\theta$		$csc\,(\theta + n \cdot 360^0) = csc\,\theta$

6.23 Ejercicios propuestos

1. Utilizando las fórmulas de reducción, halle el valor de las siguientes funciones.

   a) $cos\,135^0$ b) $sen\,150^0$ c) $tg\,240^0$ d) $csc\,245^0$ d) $sen\,(-120^0)$

   e) $ctg\,(-135^0)$ f) $cos(-240^0)$ g) $sec\,(-300^0)$ h) $tg\,\frac{3\pi}{4}$ i) $sen\,\frac{4\pi}{3}$

   j) $sec\,\frac{2\pi}{3}$ k) $csc\,(-\frac{\pi}{6})$ l) $cos\,(-\frac{\pi}{6})$ m) $ctg\,(-\frac{5\pi}{6})$

2. Exprese como funciones de un ángulo agudo las siguientes funciones y calcule su valor.

   a) $sen\,130^0$ b) $tg\,325^0$ c) $sen\,200^0$ d) $cos\,310^0$ e) $tg\,165^0$ f) $sec\,250^0$

   g) $sen\,670^0$ h) $ctg\,930^0$ i) $csc\,685^0$ j) $csc\,865^0$ k) $sen\,100^0$ l) $cos\,(-680^0)$

3. Considere las siguientes funciones y reduzcalos a funciones de ángulos del primer cuadrante. A continuación calcule sus valores con una calculadora manual. Verifique sus resultados.

   a) $sen\,\frac{7\pi}{3}$ b) $cos\,\frac{15\pi}{6}$ c) $tg\,\frac{5\pi}{6}$ d) $sec\,\frac{7\pi}{3}$ e) $ctg\,\frac{17\pi}{4}$ f) $sec\,\frac{25\pi}{3}$ g) $ctg\,\frac{5\pi}{6}$

6.24 Gráfico de las funciones trigonométricas.

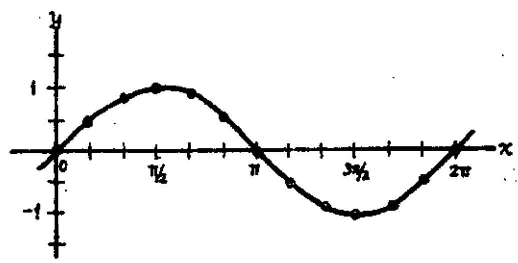
6.24.1 Los gráficos de las funciones seno y coseno

El gráfico de la función $y = sen\,x$, en el sistema cartesiano de coordenadas, se obtiene construyendo una tabla de valores y dibujando la curva como se muestra en la figura (54). Los valores de las tablas han sido calculados en las secciones precedentes.

x:	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y:	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

y además:

x: $\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y: $-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



fig(54)

Es suficiente construir la tabla de valores sólo entre $[0, 2\pi]$, ya que sabemos que la curva se repite indefinidamente hacia la izquierda y hacia la derecha. Cuando una función se repite indefinidamente en su dominio decimos que **la función es periódica.** Dicho formalmente, **se dice que la función** $y = sen\,x$ **es periódica, si existe un ángulo** α **tal que**

$$sen\,(x + \alpha) = sen\,x \quad \textbf{para todo x}$$

En este caso se dice que el ángulo α es un período de la función. Para la función $y = sen\,x$, el número 2π es un período, pero también lo son, 4π, 8π, etc, ya que:

$$sen\,(x + 2\pi) = sen\,x, \quad sen\,(x + 4\pi) = sen\,x, \quad sen\,(x + 8\pi) = sen\,x, etc,$$

Lo mismo ocurre con la función coseno. El período mínimo de la función $y = cos\,kx$ es de $x = \frac{2\pi}{k}$.

La amplitud de una función periódica es el valor máximo que alcanza la ordenada. Así, por ejemplo, la amplitud de la función $y = 4\,sen\,x$ es igual a 4. En general, la amplitud y el período de la función $y = a\,sen\,bx$ son a y $\frac{2\pi}{b}$, respectivamente.

Ejemplo 26

Hallar el período y la amplitud de la función $y = 4cos\,(\frac{3x}{2})$

SOLUCIÓN. De acuerdo a lo dicho la amplitud de la función es 4. Y su período se obtiene resolviendo la ecuación $\frac{3x}{2} = 2\pi$. Resulta entonces que:

$$\frac{3x}{2} = 2\pi \iff 3x = 4\pi \iff x = \frac{4\pi}{3}$$

Ejemplo 27

Hallar el período y la amplitud de la función $y = 2,5\,sen\,(\frac{x+1}{2})$.

SOLUCIÓN. La amplitud de la función es 2,5 y su período lo calculamos resolviendo la ecuación $2\pi = \frac{x+1}{2}$. En consecuencia $x = 4\pi - 1$

Ejemplo 28

Calcular la longitud de onda (período) y la amplitud de cada una de las funciones propuestas y trazar un gráfico aproximado de ellas.

$$a)\;\; y = 4\,sen\,x \qquad b)\;\; y = sen\,3x \qquad c)\;\; y = 3\,sen\,\frac{x}{2} \quad d)\;\; y = 2\,cos\,x$$

SOLUCIÓN. a) La función $y = 4\,sen\,x$ tiene amplitud 4 y período 2π. b) La función $y = sen\,3x$ tiene amplitud 1 y período $\frac{2\pi}{3}$. c) La función $y = 3\,sen\frac{x}{2}$ tiene amplitud 3 y período 4π. d) La función $y = 2\,cos\,x$ tiene amplitud 2 y período 2π.

6.26 El DERIVE

6.26.1 Ajuste de la función $y = sen\, x$.

Ejemplo 1

Trace el gráfico de la nube de puntos de la tabla siguiente y construya y trace la función $y = k\, sen\, x$ que ajusta dichos puntos.

x	y
0,26	0,27
0,34	0,35
0,52	0,50
0,64	0,69
0,78	0,71
0,87	0,77
1,04	0,87
1,22	0,94
1,30	0,97

1. En **Command :** ponga el cursor en **Declare** y presione la tecla Enter.

2. Aparece **Declare :** Function, Variable, Matrix, Vector. Ponga el cursor en Matrix y presione la tecla **Enter**

3. Aparece **Declare Matrix :** Rows Columns. Al lado derecho de Rows escriba 9 y al lado derecho de Columns escriba 2. Para pasar de uno a otro lado se usa el tabulador. Observe que los datos forman una matríz de 9 filas y 2 columnas. Presione la tecla **Enter**

$$2 : Fit\,[x, ksin(x)], \left| \begin{array}{ll} 0{,}26 & 0{,}27 \\ 0{,}34 & 0{,}35 \\ 0{,}52 & 0{,}50 \\ 0{,}64 & 0{,}69 \\ 0{,}78 & 0{,}71 \\ 0{,}87 & 0{,}77 \\ 1{,}04 & 0{,}87 \\ 1{,}22 & 0{,}94 \\ 1{,}30 & 0{,}97 \end{array} \right|$$

Ponga el cursor en **Simplify** y luego presione la tecla **Enter**. En la parte inferior aparece **Command** y en la parte superior de la pantalla aparece 3: $\frac{4\,244}{4\,141} sen\, x \iff 1,02004\, sen\, x$ que es la ecuación pedida.

6. Para graficar la nube de puntos en el Sistema Cartesiano de Coordenadas, coloque en **blanco** la matríz de puntos, a continuación ponga el cursor en **Plot**, presione la tecla **Enter** y efectúe la siguiente sucesión de operaciones. a) Overlay Enter b) Option Enter c) State Enter d) Rectangular Enter e) Plot Enter. En la parte superior de la pantalla aparece la nube de puntos. Presione la tecla Enter.

7. Para graficar la función coloque en blanco la función hallada, presione la tecla Enter y repita la sucesión de operaciones desde (a) hasta (e). En la parte superior de la pantalla aparece el gráfico de la ecuación hallada.

8. **Nota.** Dependiendo de los datos se puede ajustar la función utilizando $y = kcos\, x$ o bien con $y = kcos\, x + msin\, x$.

ANEXO A

A.1 Simplificación de fraccionales algebraicas.

Una fracción algebraica es el cociente de dos expresiones algebraicas. Ejemplos de este tipo de expresiones son las siguientes fracciones:

$$a)\ \frac{3x^2-2}{x+1}\quad b)\ \frac{x-2}{x^2-5}\quad c)\ \frac{z+1}{z}$$

Con frecuencia es necesario expresar una fración complicada, en otra más simple. El proceso de simplificar fracciones está sujeto a algunos principios básicos; principios que a veces son aplicados en forma erronea. Así, por ejemplo, **es un error** simplificar separadamente la letra **k** del numerador y denominador y escribir la igualdad:

$$\frac{k+a}{k+b}=\frac{a}{b}$$

Otro error que se comete con mucha frecuencia es simplificar la letra **x** y escribir la igualdad:

$$\frac{x+a}{x}$$

Este mismo error se amplía a situaciones como las siguientes:

$$\frac{x+y+a}{x+y+b}=\frac{a}{b}$$

En los ejercicios que siguen, algunas fracciones pueden simplificarse y otras no. Intente expresar dichas fracciones en la forma más simple posible.

A.3 Multiplicación y división de fracciones algebraicas.

La multiplicación y división de fracciones algebraicas siguen las mismas reglas que la multiplicación y división de fracciones con números reales. Es decir:

$$i)\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad ii)\ \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Cuando a, b, c, d son polinomios, conviene, siempre que sea posible, descomponerlos en factores. Esto hace que las operaciones se efectúen más fácilmente.

Ejercicios propuestos.

1) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{3}$ 2) $\frac{x^2-9}{x^2+2x}\cdot\frac{x+2}{x-3}$ 3) $\frac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}:\frac{x^2-4x+3}{x^2+5x+4}$ 4) $\frac{x^2-3x-4}{x^2-1}:\frac{x^2-16}{x+3}$

5) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+4}\cdot\frac{x^2-1}{(x+2)^2}$ 6) $\frac{x^2-25}{x^2-36}:\frac{x^2-5}{36x^2-1}$ 7) $\frac{x^2-x-12}{x^2+x-12}:\frac{x^2+2x-15}{x+1}$ 8) $\frac{x^2+6x}{x^2-3x-10}\cdot\frac{x^2-4x-12}{x^2+5x-6}$

9) $\frac{4r+8s}{3rs}:\frac{3(r+2s)}{9rs}$ 10) $\frac{xy+3x}{7y}:\frac{x^2y+3x^2}{4y}$ 11) $\frac{3x^2+x-2}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-x}{6x-4}$

12) $\frac{8x^2+2x-15}{3x^2+13x+4}\cdot\frac{6x^2-x-1}{2x^2+5x+3}$ 13) $\frac{6x^2+7x-20}{12x^2+31x+7}:\frac{3x^2+13x+14}{3x^2-2x-21}$ 14) $\frac{xy-xz}{xy+xz}\cdot\frac{y}{y-z}\cdot\frac{y+z}{y}$

Las operaciones de suma, resta, multplicación y división de fracciones pueden combinarse de varias maneras, especialmente aquellas en que los numeradores y denominadores son, a su vez, fracciones. En estos casos conviene efectuar las operaciones separadamente en los numeradores y denominadores y después reealizar la división.

A.4 Fracciones compuestas.

1) $\frac{\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}}{\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}}$ 2) $\frac{3+\frac{4a}{a+5b}}{\frac{2a}{a+5b}}$ 3) $4x-\frac{6}{2x-\frac{3}{5x}}$ 4) $3-\frac{2}{4x-\frac{5}{3x}}$ 5) $\frac{\frac{x+3}{9x^2-1}}{\frac{2x-1}{6x^2-5x+1}}$

6) $\frac{\frac{2x-1}{2x^2+5x+2}}{\frac{x+2}{2x^2+11x+5}}$ 7) $\frac{\frac{x^2}{x+2}+\frac{x-1}{x+3}}{\frac{x^2}{x-2}-\frac{2}{x+4}}$ 8) $\frac{\frac{x}{x+2}+\frac{3x}{2x-5}}{\frac{x^2}{x-3}-\frac{x+1}{x+2}}$ 9) $\left(\frac{x^2}{x+2}+\frac{x+2}{x^2}\right)\cdot\left(\frac{x}{5x+2}-\frac{5x+2}{x}\right)$

De esto se desprende que:

$$(x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejercicios propuestos.

1. En los siguientes ejercicios efectúe la operaciones indicadas.

1) $(4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}})x^{\frac{3}{2}}$ 2) $(2x^{\frac{1}{3}} - 3x^{-\frac{2}{3}})x^{frac13}$ 3) $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}})^2$ 4) $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})^3$

5) $\frac{x^3+4x^{\frac{3}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}}$ 6) $(p^{\frac{1}{2}} - q^{\frac{1}{2}})(p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}})$ 7) $(x^{-\frac{3}{2}} + y^{\frac{5}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{3}{2}})(\sqrt{x^2 - 3x + 1})^0$

2. Cambie las siguientes expresiones en otras equivalentes en las cuales todos los exponentes sean positivos y no aparezca ninguna fracción compuesta.

1) $\frac{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}-4x^{-\frac{4}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}+x^{-\frac{5}{3}}}$ 2) $\frac{3y^{\frac{1}{7}}-4y^{-\frac{3}{7}}+5y^{\frac{2}{7}}}{2y^2-y^{-\frac{4}{7}}}$ 3) $\frac{5a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}}+4a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}}{5a^{-2}b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b}$ 4) $\frac{4r^{-\frac{1}{5}}s^{\frac{3}{5}}-3r^{\frac{2}{5}}s^{-\frac{1}{5}}}{5rs+7r^2s^{-4}t}$

3. Simplificar las siguientes expresiones dadas.

a) $(x^2 + 6x + 9)^{\frac{1}{2}}$ b) $(9x^2 + 6x + 1)^{\frac{1}{2}}$ c) $\frac{(4x^2-12x+9)^{\frac{1}{2}}}{2x-3}$ d) $\frac{(16x^2+40x+25)^{\frac{1}{2}}}{4x+5}$

B.2 Racionalización de denominadores.

Con frecuencia surgen expresiones algebraicas cuyos denominadores son números irracionales. El lector estará de acuerdo en que sumar, o restar, expresiones de este tipo representa una dificultad mayor que si los denominadores fueran números racionales. Para mejorar esta situación se recurre a la racionalización de los denominadores, esto es, transformar las mismas expresiones en otras equivalentes con denominador racional.

4. Racionalizar los denominadores de las expresiones siguientes.

a) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{-2}{\sqrt{11}}$ c) $\frac{-5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$ e) $\frac{3}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}}$ d) $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-3}}$

SOLUCIÓN. A cada factor del denominador le corresponde una fracción parcial que tiene por numerador una constante y por denominador el factor. En efecto, hacemos:

$$(i)\quad \frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{3x-2}$$

El problema consiste, ahora, en determinar las constantes A y B. De la expresión (i) resulta:

$$(ii)\quad \frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{3x-2} = \frac{(3A+B)x-2A+2B}{(x+2)(3x-2)}$$

que son identidades válidas para todo x, excepto para $x = -2$ y $x = \frac{2}{3}$. Determinar los valores de A y B en la expresión (ii) es equivalente a determinar los valores de A y B en la expresión (iii)

$$(iii)\quad 5x+2 = (3A+B)x - 2A + 2B$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes en ambos miembros de la identidad (iii) resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcl} 3A & + & 5B & = & 5 \\ -2A & + & 2B & = & 2 \end{array}$$

cuyas soluciones son $A = 1$ y $B = 2$, y por lo tanto, de acuerdo a la expresión (i) resulta:

$$(iv)\quad \frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-2}$$

caso 2. Factores de segundo grado no repetidos en el denominador.

En este caso, por cada factor cuadrático ax^2+bx+c, irreducible, en el denominador se escribe una fracción parcial del tipo $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.

Descomponer en fracciones parciales la expresión $\frac{2}{(x-1)(x^2+x+4)}$

SOLUCIÓN. De acuerdo a lo dicho, escribimos:

$$(i)\quad \frac{2}{(x-1)(x^2+x+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+4x+4} + \frac{C}{x-1}$$

De la ecuación (i) resulta la igualdad siguiente:

$$(ii)\quad \frac{Ax+B}{x^2+4x+4} + \frac{C}{x-1} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+x-4)}{(x-1)(x^2+4x+4)}$$